同”的特性，而舍弃“大小一定相等”这一条件，使学生感受全等与相似的关系，进而定义相似三角形.这是从特殊到一般的过程，是弱抽象的过程.可见，利用强抽象与弱抽象的关系进行相互补充，可以丰富学生对概念的认识.

另外，徐利治等[2]、喻平[3]都提到广义抽象.在定义概念 B 时用到了概念 A，或者在证明命题 B 时用到了命题 A，则称 B 是 A 的广义抽象，即 B 比 A 抽象.苏科版教材中的几何概念也有类似的广义抽象，譬如，圆心角是在圆的基础上定义的，从这一角度看，圆心角是圆的广义抽象的概念.但我们也可以从弱抽象的视角认识这一概念：如图 3，通过对 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle BOD$ 等角的观察，归纳这些角的共同特征.像这样，形成圆心角概念的过程就是弱抽象的过程.也可以在角的基础上直接增加“顶点在圆心”的条件，从这个角度看，圆心角概念又是强抽象的结果.

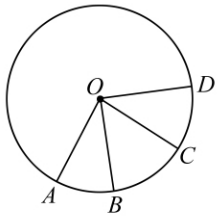

图 3

弱抽象与强抽象是初中平面几何概念形成的两种主要形式，正确认识这两种抽象及其相互关系，才能在实际教学中合理选择，有效利用，提高概念学习的效率.这是平面几何概念教学的需要，也是平面几何学习的需要，更是发展学生数学抽象能力，使核心素养在课堂中落地生根的需要.

参考文献

[1] 徐利治，郑毓信.数学抽象方法与抽象度分析法[M].南京：江苏教育出版社，1990：42-52.

[2] 徐利治，张鸿庆.数学抽象度概念与抽象度分析法[J].数学研究与评论，1985，5(2)：133-140.

[3] 喻平.加工水平对具有广义抽象关系数学问题迁移的影响[J].数学教育学报，2005(8)：5-9.

作者简介　韩诗贵(1972—)，男，中学高级教师，无锡市数学学科带头人，主要从事初中数学教学研究与实践。

提升教学设计水平培训途径示例
——透过 2019—2020 安徽省初中骨干数学教师“国培计划”的视点

淮北师范大学数学科学学院　235000　张　昆

【摘　要】 由于“教人学算比自己学算难”，因此做好数学教学设计培训工作不是一件容易的事.要做好这项工作，需要确立培训体系；选择培训内容与确定培训形式.文章偏重于渗透“合适根据地”这种起点策略，提高数学教学设计的有效性，进而提升数学教师的教学设计水平.

【关键词】 数学教学设计；“合适根据地”；“国培计划”

华蘅芳早就认识到，“教人学算比自己学算难”[1].弗赖登塔尔说，“为了要教好学生数学，就要懂得怎样教”[2].波利亚则把数学教学与艺术家的艺术创造相比拟，认为“如何教”比“教什么”更重要，他指出“教师只有得法的教学，才能发挥数学知识启迪学生心灵的作用”.他不断地总结数学教学的“小窍门”，在《数学的发现》一书中，归纳出了“教师十诫”[3]，用以指导数学教师如何教学.M·克莱因说，“一个优秀的数学研究人员也许在数学课堂上把课上得一团糟，原因在于他们只是一心钻研数学，而没有仔细地研究数学教学”[4].将这些关于数学教学的名家名论集中到一个点上，就是数学教师提高自己的数学教学水平不容易.那么，从“国培计划”的目标要旨出发，如何提高受训教师数学教学设计水平呢?

1　数学教学设计培训的准备工作

首先，一篇好的教学设计预案的出现，需要当代优势教学理念或教育理论的指导；需要精准的教材(具体知识点及其所处于结构中的环节节点的确定)分析，学情(比照教材分析结论，思考将其投射到学生心理环节中去时，推测学生发生认识起承转合的心路历程)分析，教学法加工等；对于教学预案的评价与修改；进入课堂实施及实施后的反思，再进行必要的修改与完善.因此，优质数学教学设计预案的产生需要本体数学知识、时代优势教学理念、数学教学法知识等综合运用.一方面，数学教学设计培训一定要建立在受训教师的教学现实(模拟弗赖登塔尔“数学现实”概念使用的)的基础上；另一方面，通过数学教学设计培训活动，帮助受训教师认识到教学设计所需要的基础性知识，从而形成针对性学习，以掌握这些关于数学教学设计及其课堂实施方面的知识.数学教师教学设计水平的提升是一个综合性的结构整体工程，它处于教学准备工作的顶层，而且还具有极强的实践性.因此，

极大地增加培训的难度，对培训教师构成相当大的挑战.

其次，选择培训内容.为了选择培训内容，在培训前对受训教师的调查问卷中，笔者设计了一个问题："关于数学教学设计，您对哪个具体数学知识点感到十分困难?"在回收的33份有效问卷中，学员关于具体困难的数学知识点的频次次第为：勾股定理；直角坐标系概念；数轴概念；函数概念；角平分线的互逆定理；列方程解应用题；垂径定理；有些进入中考试卷中的试题；等等.笔者从这些疑难教学设计中选择出有代表性的数学知识点，作为培训过程中的内容载体.如此，一方面，可以实实在在地帮助受训教师解决教学设计实践中的疑难问题；另一方面，也拉近了受训教师与笔者之间的心理距离，使他们很快地对笔者的培训活动产生兴趣，从而接受笔者所渗透的数学教学设计的有关观念与理论.

在选择具体的培训内容进行课堂教学时，笔者选择了数轴、直角坐标系与函数这三个具体数学概念，勾股定理、垂径定理这两个定理与两道某种程度上对于受训教师具有非常规性特点的数学题等具体的培训素材，详细地说明教学设计前的准备工作，教学设计过程中的具体活动及其结果，将获得的教学设计预案拿到培训课堂上实施，然后进行反思与修改.从这种拟真化途径中，帮助受训教师身临其境地体会到数学教学设计及其课堂实施实践过程[5].

再次，确定培训方式.选择了上述的数学教师培训内容后，内在地规定了笔者在课堂教学中的培训方式，就是尽可能地基于启发受训教师关于具体数学知识点萌发创新教学设计，或者利用受训教师自己在教学实践中曾经使用的教学设计方案，在笔者与所有受训教师一起思考、交流与讨论中，促使受训学员体验优化这些数学教学设计方案的具体过程，创新与优化都是受训教师所需要的，是提高数学教学水平的重要的、也是基础性的要素.通过处理某个数学知识点教学设计的疑难环节，或对整个教学设计及其课堂实施的总结，渗透相关的教学设计理念或理论.

笔者就是以这些具体数学知识素材为载体，以具体的教学设计过程及其课堂实施为例的这种培训方式，完成结构体系性的具体培训工作.笔者之所以选择这种培训方式，是因为由此可以突出自己长期作为一线数学教师的优势，因为，笔者积累了丰富的创新数学教学设计及其课堂实施的经验，培训的过程大部分就是将自己的这些经验经由教学法的加工传递于受训教师的过程，当然，与这么多有经验的教师一起研讨、互动与争论，肯定会碰撞出创新的火花，从而实现培训活动中的教学相长的目的.

2 数学教学设计课题的具体培训过程

做好了次第确立培训体系，选择培训内容与确定培训形式这些准备工作后，就内在规定了数学教学设计培训活动展开的路向.利用具体的数学知识点示例，带领受训教师进行教学设计的准备工作，其一，对于教科书所提供的数学知识进行教材分析，作出合理的取舍与增补；其二，比照教材分析的结论进行学情分析，揣摩将教材分析的结论投射到学生心理上去的心路历程；其三，对于教材分析与学情分析所得到了的结果综合考虑，进行数学教学法加工(或简称为"教学法分析").

上述的"三项分析"都内含着相应的教育教学理论作指导，笔者通过与受训教师讨论与交流的分析过程也就是渗透数学教育教学理论的过程.笔者经由几轮数学教师培训经验认识到，如果向数学教师传授纯粹的数学教育教学理论，由于他们的认知结构中没有固定这种理论概念的"凝聚核"(即下文的"合适根据地"概念)，他们与培训教师的想法不能产生共鸣与回应，结果味如爵蜡，极大损伤了培训效果.这是培训教师首先必须解决的问题，否则培训工作将会事倍功半.

因此，笔者选择具体数学知识点的目的在于，一方面，这些知识点确实是他们在自己的教学设计及其课堂实施活动中需要解决的具体问题，从而可以吸引他们的注意力，拉近他们与笔者的心理距离；另一方面，更为重要的是，这种受训教师在自己教学中难以处理的具体知识点正是作为他们的认知结构中的一枚"钉子"("合适根据地")，经由这颗"钉子"将数学教育教学理论或理念"挂靠"到他们的认知结构中去，如此，将教学设计实践活动中的具体经验裹夹着的数学教育教学理论或理念载入受训教师的认知结构，从而达到"润物细无声"的培训效果[6].这里以从"数轴"概念教学设计及其课堂实施过渡到"平面直接坐标系"概念教学设计及其课堂实施为例加以说明.

关于"数轴"概念教学的准备工作中的具体"三项分析"，笔者在培训过程中，详细地进行讨论与解释，但是由于篇幅的限制，此处不宜赘述.这里只将最后得到教学设计及其课堂实施实录如此：

师：有理数分类成(板书)：负数；零；正数.可用一直线上的点表示所有有理数吗?

生1：负、正数无限多，零只一个，在直线MN上任取一点O表示零(如图1).

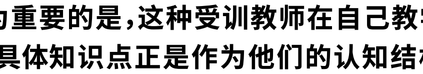

图1

师：点O将直线MN分成三部分，自身表示0，称为"原点".负、正数分别由射线OM，ON(端点O除外)上的点表示.哪条射线上的点表示负数或正数呢?

注：学生提出了许多方案.

师：哪种更简单、更实用?

生: 用箭头!

师: 在图 1 直线 MN 上,画一个箭头(如图 2) . 用具有箭头射线上的点表示正数; 反之,表示负数. 称 “箭头” 为 “正方向”.

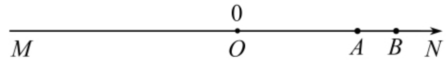

图 2

师: 如何在图 2 中表示有理数 + 2?

注: 两个同学选择不同的点 A,B,都声称要表示 + 2.

师: 哪一个才是真正表示 + 2 的点?

注: 学生决定用一把 “尺子” 来裁决,以原点 O 为起点,在具有正方向的那条射线上次第量两尺,规定 “尺子” 落脚的终点 C 表示 + 2(如图 3) .

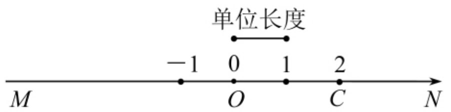

图 3

师 “尺子” 是一个度量长度的 “单位”,称之为 “单位长度”.

师(板书) : 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴[7].

笔者(渗透相关理论) : 教科书所提供的 “在笔直的公路上等距离的种树”, “温度计”[8] 等教学素材,都不是学生发生 “数轴” 概念的 “合适根据地”(即当发生新数学知识认识时,学生所依据的认知结构中已经存在的数学知识,称为 “根据地”,如产生 “数轴” 概念时的 “温度计”,如果教师选择出的是学生发生新数学知识认识时认知结构中的最为合适的数学知识,就称其为 “合适根据地”[8]) ,而只是普通 “根据地”. 由这种教学设计及其课堂实施的途程,可以明显地认识到,产生 “数轴” 概念的 “合适根据地” 是 “有理数” 概念; 还可以认识到,一个知识点的教学设计选择了 “合适根据地” 与普通 “根据地” 所产生的教学效果具有天壤之别,检验这个观点是非常简单的,当我们提问 “ ‘数轴’ 概念中的 ‘正方向’ 有什么作用时? ” 以教科书所提供的素材作为普通 “根据地” 的教学,学生就不容易回答这个问题,而上述以 “有理数” 作为 “合适根据地” 的教学,学生就会理解清晰,从而可以从本质上理解 “数轴” 概念.

笔者: 下面我们探讨 “平面直角坐标系” 概念的教学设计及其课堂实施问题(多媒体呈现教科书提供的素材[8] . 大家仔细地阅读这段素材,如何进行教学设计?

师(指受训教师) 1: 我想,首先应该确定 “合适根据地”,教科书在建立 “直角坐标系” 之前,引入了 “有序数对” 表示平面上点的 “位置” 作为铺垫,正如张老师您进行 “数轴” 概念教学设计及其课堂实施一样,我认为这不是引入 “直角坐标系” 概念的 “合适根据地”,这种生活情境只是普通 “根据地”. 但是, “合适根据地” 究竟是什么我没有想好.

师 2: 由于 “平面直角坐标系” 是由两个数轴组成了一种特殊形式的平面结构,因此,产生 “平面直角坐标系” 概念的 “合适根据地” 一定是 “数轴” 概念. 教科书所设计的确定点在平面上位置的 “生活情境” 提示我们,可以使用图 4 的方式提出问题. 具体的提法是,其一,介绍图 3 中的数轴概念可以向学生说明,引入数轴的目的之一是在一条直线上确定每一个有理数的相对位置,从而引入一维空间(直线) 中点的位置的概念(例如,点 M,N 相对于点 O 的位置,或者更为抽象一些地介绍点 M 相对于点 N 的位置的表达) 作为生成 “平面直角坐标系” 的 “合适根据地”; 其二,如何在图 4 中用相关的有理数表示点 P 位置呢? 如此,教学设计及其课堂实施就可以由此 “初始问题” 而展开.

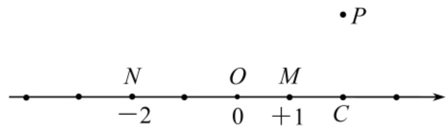

图 4

笔者: 非常好! 选择与确定 “合适根据地” 为教师 “二次开发教材” 提供了观念性的指导. 下面大家分组讨论,如何基于师 2 所提出的 “初始问题” 进行建立 “平面直角坐标系” 概念的教学设计及其课堂实施呢?

受训教师经过讨论,基于这个 “初始问题” 进行教学设计及其修改定稿,然后由师 2 执行模拟授课,即师 2 作为初一年级的数学教师,其他受训教师与笔者作为初一学生展开模拟具体的课堂教学活动. 现将教学过程的关键环节实录如下:

师(多媒体出示图 4 中的数轴) : 大家仔细观察这条数轴上的三个点 N,O,M,它们除了分别表示有理数 − 2,0 与 + 1 外,这些点本身之间具有怎样的关系?

生 1: 表示 − 2 与 + 1 在这条数轴上相对于原点 O 的位置,即表示 − 2 的点 N 是在负方向上的到原点 O 的距离为两个 “单位长度”,同样,点 M 表示 + 1 在正方向上到原点 O 的距离为一个单位长度.

师: 很好! 由此可以认识到,每一个有理数在数轴上的表示就是在不同方向上到原点的距离,其实,数轴就是表示两个有理数的相对位置关系. 那么,我们稍微将问题向前拓展一点,假如在一个平面上已经有了数轴,在这条数轴所处的直线外有一点 P,如图 4,那么如何确定点 P 所在的位置呢?

生: ……(省略号表示学生思维活动的暂时中断)

注:学生通过讨论,想出了各种各样的创造性办法,例如,这些想法中有“极坐标系”的萌芽,有直接连接OP将点O与点P置于同一条直线上等,但是,由于知识与经验的限制,这些方法学生自己都不能自圆其说.

师:为了在图4中确定点P的位置,大家进行了很好的讨论.我们在一条直线上确定某个点的位置,只要有相对的一个已知点(“原点”)与一个“正方向”、一个“单位长度”就可以使用有理数来刻画这个点在这条直线上的具体位置了.那么,在这个平面上,要确定点P位置,大家已经想到了许多方法,但是还不能确定,那应该怎么办呢?

生:……

师:现在看看怎样确定我们这个班级的某个同学所在位置.大家思考如何确定?

生2:我想应该使用“行”与“列”的配合,比如对于“行”我们以从教室的门到后窗的方向为“行”的正方向,对于“列”我们以从学生的眼睛看向黑板的方向为“列”的正方向,以门所在的位置为起点,我们就可以确定每一个同学所在位置了.

师:那么,如何确定图4中点P的位置呢?

生3:也使用“行”“列”的配合,在图中添加一条关于“列”的数轴,就可以确定点P点位置了.

师:很好! 首先如何确定这条数轴的位置?

生4:我想,加上去的那条“列”数轴应该置于一种特殊的位置.将这条数轴的“原点”与原数轴的“原点”重合,并且与原数轴形成垂直关系(如图5),于是,我们记前一条数轴为x轴,加上去的那条数轴为y轴.

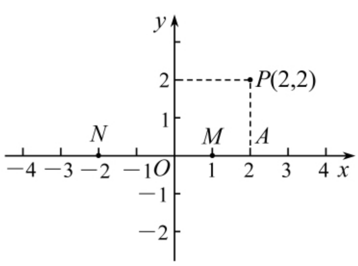

图5

师:好! 那么如何具体地定位点P呢?

生6:首先,过点P作y轴的垂线段,量得线段长为2个长度单位,记为2;其次,过点P作x轴的垂线段,量得线段长为2个长度单位,记为2.但是,……

师:我们在一条直线上确定一个点位置只需要一个可供参照的已知点,然而,要想在平面确定一个定点的位置,显然,参照一个已知点就不行了.这里可以采用两条具有公共“原点”且相互垂直的数轴作为参照系,也就必须要使用两个数据来表示,并且由于是参照系,这两个数据也构成了一个系统,我们称为一个有序数对,并且将在x轴上的读数放在前面,y轴上的读数放在后面,形成了(2,2),称之为点P的坐标,于是,我们将具有这种关系的两条数轴称为“平面直角坐标系”.

笔者:这里通过精心选择出了“有理数”、“数轴”与“平面直角坐标系”次第进展的数学知识点,“有理数”构成了“数轴”的“合适根据地”,“数轴”又构成了“平面直角坐标系”的“合适根据地”.这正是数学知识结构性特征的表现,由此,帮助大家理解确定“合适根据地”是“数学教学设计”的首要的也是关键的起始环节,它需要综合教材分析与学情分析的结果,才有可能取得.“合适根据地”为教学法加工进行教学设计提供了良好的条件.

3 简要结语

数学教学设计是依据相关的数学教育教学理念或理论、数学学习理论与观点,运用系统科学的方法,对于数学教学中的相关要素(教材、学生、教师或媒体等)进行分析与整合,从而确定教学目标,选择教学模式,寻获教学策略,提出评价依据,最终形成具体的、可执行的教学预设方案.数学教学设计所承担的主要功能就是建立起数学教育教学理论与数学课堂教学实践之间的桥梁,为数学教师将自己已经掌握了的数学教育教学理论应用于数学课堂教学实践中去提供跳板与空间.其中,运用“合适根据地”策略对于实现数学教学设计的有效性起着基础性作用,因此,选择“合适根据地”是提高数学教学设计水平的前提与基础.

参考文献

[1] 刘钝.大哉言数[M].沈阳:辽宁教育出版社,1993:435.
[2] Hans Freudenthal.Why to teach mathematics so as to be useful[J].Educational Studiesin Mathematics,1968,Vol.1(1-2):3-8.
[3] [美]G·波利亚.数学的发现——对解题的理解、研究与讲授(第二卷)[M].刘远图,秦章,译.北京:科学出版社,1987:496-498.
[4] M·Kline.A Proposal for the High School Mathematics Curriculum[J].The Math Teacher,1966(4):172-179.
[5] 张昆.整合数学教学设计的取向——基于逻辑取向与心理取向的视角[J].中国教育学刊,2011(6):52-55.
[6] 张昆.数学教学中设计“初始问题”研究——透过确定“合适根据地”的视点[J].内江师范学院学报,2020,35(6):18-23.
[7] 张昆,张乃达.设计结构性初始问题的实践与探索——数学教师专业成长的视点[J].中学数学(初中刊),2017(6):56-61.
[8] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.义务教育课程标准实验教科书·数学·七年级(上册)[M].北京:人民教育出版社,2012.
[9] 张昆.整合数学教学中设置问题的取向——透过“观念性问题”与“技术性问题”的视点[J].中小学教师培训,2019(6):53-56.