第24卷第6期　　德州学院学报　　Vol.24, No.6
2008年12月　　Journal of Dezhou University　　Dec., 2008

"九连环"游戏所给出的递推数列研究

刘耀斌

(德州学院数学系, 山东德州　253023)

摘　要: 九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏, 其玩法多种多样, 给出了根据"九连环"游戏的解决所得到的一类线性递推数列, 并且给出其通项公式的三种证明方法.

关键词: 九连环; 递推数列; 特征多项式

中图分类号: O151.2　　文献标识码: A　　文章编号: 1004-9444(2008)06-0030-03

文献[1]给出了解开九连环的一个数学公式: $S_n=\frac{1}{6}\left(2^{n+2}-3+(-1)^{n-1}\right)$, 根据笔者玩九连环的做法, 提出不同的见解.

首先了解九连环的构造: 九连环的设计原理是数学上的拓扑学, 它主要有九个圆环及框架组成, 每个圆环都连有一个直杆, 各直杆在后一个圆环内穿过, 九个直杆的另一端用平板或者圆环相对固定, 圆环在框架上可以解下或者套上, 玩九连环就是要把这九个环全部从框架上解下来或者全部套在框架上(如图1a)).

九连环的玩法比较复杂, 但是不管怎么玩, 无论解下环还是套上环都要遵循一定的规则. 文献[1]中的通项公式是按照以下三个规则给出的: (1)每次只能解下或者套上一个环; (2)第一个环任何情况下, 可自由上下(图1b)); (3)如果某一个环在上, 而它前面所有的环都在下, 那么这个环的后一个可上也可下(图1c)).

在玩九连环的过程中发现, 如果把游戏规则改变, 可以得到另外一个计算解环的通项公式, 而且这个公式简单易记, 得到的步数也大为减少.

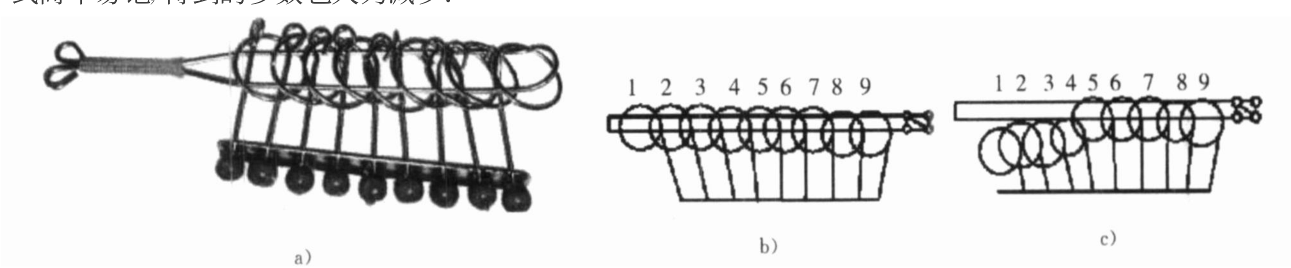

图1　九连环示意图

把游戏规则改为以下三条: (1)每次可以解下或者套上一个或者两个环; (2)第一个环可自由上下以及前两个环可一起自由上下; (3)从第二个环开始, 如果某一个环在上, 而它前面所有的环都在下, 那么这个环的后一个可上也可下. 实际上在玩九连环的过程中, 发现只有前两个环可以一起自由上下, 其它的环每次只能上下一个, 另外还要知道解下 n 个环和套上 n 个环需要的步数是一样的. 遵循这样的规则, 给出解下全部的 n 个环需要的步数.

设解下全部的 n 个环需要的步数为 S_n, 那么要解下第一个环只需要一步, 即 $S_1=1$, 要解下前两个环也只需要一步, 即 $S_2=1$, 而当 $n\geq 3$ 时, 要全部解下这 n 个环, 就需要先解下第 n 个环, 而要解下第 n 个环就只能保留其前面的第 $n-1$ 个环, 也就是要先把前面的 $n-2$ 个环全部解下, 这需要 S_{n-2} 步, 这时再需要一步就可以把第 n 个环解下, 这时为了把第 $n-1$ 个环解下, 还需要把前面的 $n-2$ 个环全部套上又需要 S_{n-2} 步, 这时问题就变成了 $n-1$ 个环的情形, 要全部解下这 $n-1$ 个环还需要 S_{n-1} 步. 于是有

收稿日期: 2008-02-15

作者简介: 刘耀斌(1968-), 男, 山东平原人, 讲师, 硕士, 主要从事代数学方面的研究.

$S_n=S_{n-2}+1+S_{n-2}+S_{n-1}$

如在图 1c)的状况下, 就可以解下第 6 个环, 然后要解下第 5 个环还需要把前面的 4 个环全部套上才可以. 通过分析可以得到以下具有初值条件的递推关系

$$S_1=1,\ S_2=1,\ S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}+1,\ (n\geq 3) \tag{1}$$

利用递推关系(1)式给出求 S_n 的通项公式的三种方法.

1　应用归纳法求解[2]

由递推关系(1)式, 可以知道 $S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=4,\ S_4=7,\ S_5=16,\ S_6=31$
于是猜测得到下列公式

$$S_n=\begin{cases}2^{n-1} & n\text{ 为奇数}\\ 2^{n-1}-1 & n\text{ 为偶数}\end{cases} \tag{2}$$

下面用数学归纳法给出其证明

1) 显然 $n=1, 2$ 时, 公式(2)式是成立的.

2) 假设对于小于 n 的自然数, 公式(2)式都是成立的, 那么对于 n 的情形, 当 n 为奇数时, 则有

$$S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}+1=2^{n-2}-1+2\times 2^{n-3}+1=2^{n-2}+2^{n-2}=2^{n-1}$$

当 n 为偶数时, 则有

$$S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}+1=2^{n-2}+2(2^{n-3}-1)+1=2^{n-2}+2^{n-2}-1=2^{n-1}-1$$

即公式对于 n 也成立.
因此对于所有的正整数 n, 都有

$$S_n=\begin{cases}2^{n-1} & n\text{ 为奇数}\\ 2^{n-1}-1 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

2　应用等比数列求解

由 $S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}+1$ 得到

$$S_n+S_{n-1}+1=2(S_{n-1}+S_{n-2}+1),\ (n\geq 3)$$

因为 $S_1=1, S_2=1$, 于是数列 $\{S_n+S_{n-1}+1\}$ 是以 $S_2+S_1=3$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 于是得到

$$S_n+S_{n-1}+1=(S_2+S_1+1)2^{n-2}=3\times 2^{n-2},\ (n\geq 3)$$

即

$$S_n+S_{n-1}=3\times 2^{n-2}-1=2^{n-1}+2^{n-2}-1$$

又得到

$$S_n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=-(S_{n-1}-2^{n-2}+\frac{1}{2}),\ (n\geq 3)$$

因此数列 $\{S_n-2^{n-1}+\frac{1}{2}\}$ 是以 $S_{3-1}-2^{3-2}+\frac{1}{2}=1-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ 为首项, 以 -1 为公比的等比数列, 于是又可以得到

$$S_n-2^{n-1}+\frac{1}{2}=(-\frac{1}{2})\times(-1)^{n-2}$$

因此有

$$S_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})\times(-1)^{n-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)^{n-1}=2^{n-1}-\frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})$$

也就是

$$S_n=\begin{cases}2^{n-1} & n\text{ 为奇数}\\ 2^{n-1}-1 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

3　应用矩阵方法求解[3, 4]

由 $S_n=S_{n-1}+2S_{n-2}+1$, 可以得到如下矩阵关系

$$\begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{n-1} \\ S_{n-2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (n\geq 3)$$

令 $\alpha_n=\begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，上式可以写为 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$，通过递推可以得到 $\alpha_n=A^{n-2}\alpha_2$， $(n\geq 3)$又 $\alpha_2=\begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以 $\alpha_n=A^{n-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 因此只需要计算矩阵 A^{n-2}.

因为矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

所以矩阵 A 有三个不同的特征值

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$$

矩阵 A 对应于 $\lambda_1=-1$ 的一个线性无关的特征向量 $\xi_1=(1,-1,0)^T$，矩阵 A 对应于 $\lambda_2=1$ 的一个线性无关的特征向量 $\xi_2=(1,1,-2)^T$，矩阵 A 对应于 $\lambda_3=2$ 的一个线性无关的特征向量 $\xi_3=(2,1,0)^T$.

取可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=diag(-1,1,2)$，即 $\boldsymbol{A}=P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{n-2}=P\begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & & \\ & 1^{n-2} & \\ & & 2^{n-2} \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n-2}+2^n & -4\times(-1)^{n-2}+2^n & -1\times(-1)^{n-2}+2^n-3 \\ 2\times(-1)^{n-1}+2^{n-1} & -4\times(-1)^{n-1}+2^{n-1} & -1\times(-1)^{n-1}+2^{n-1}-3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_n=\begin{pmatrix} S_n \\ S_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}=A^{n-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n-2}+2^n & -4\times(-1)^{n-2}+2^n & -1\times(-1)^{n-2}+2^n-3 \\ 2\times(-1)^{n-1}+2^{n-1} & -4\times(-1)^{n-1}+2^{n-1} & -1\times(-1)^{n-1}+2^{n-1}-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3\times(-1)^{n-2}+3\times 2^n-3 \\ -3\times(-1)^{n-1}+3\times 2^{n-1}-3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times(-1)^{n-2}+2^{n-1}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\times(-1)^{n-1}+2^{n-2}-\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$S_n=-\frac{1}{2}\times(-1)^{n-2}+2^{n-1}-\frac{1}{2}=\begin{cases} 2^{n-1} & n\text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}-1 & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

由以上结论可以知道，要全部解下九个环需要的步数为 $2^{9-1}=2^8=256$，显然比文献[1]中给出的341步要少，而且这里给出的公式也比较容易记忆.

参考文献：

[1] 陈剑飞."九连环"与数列[J].数学通报，2004，(10).

[2] 张雄，李德虎.数学方法论与解题研究[M].北京：高等教育出版社，2003.

[3] 居余马，等.线性代数[M].北京：清华大学出版社，2005.

（下转第104页）

[5] 过春燕,张邦俊.基于 Surfer 的机场噪音等值线计算机绘图方法[J].中国环境科学,2003,23(6):631-634.
[6] 赵金亮,徐亚飞,刘焕宗.Surfer 软件在油田开发中的应用[J].计算机工程与应用,2003,(14).
[7] 李绍堂.SURFER 软件图形数据的进一步处理和利用[J].物化探计算技术,1997,19(2):1.
[8] 刘炳文.VISUAL BASIC 6.0 程序设计-ACTIVEX 篇[M].北京:人民邮电出版社,1999:
[9] 黄金软件公司.Surfer help[G].2002.
[10] 姚兴军,彭理通.用 VB 和 Surfer 实现污染物在大气中扩散的动态演示[J].化工环保,2004,(4):67-69.
[11] 汪懋华.精细农业发展与工程技术创新[J].农业工程学报,1999,56(1).

Application of VB/Surfer Programming in Laser—controlled Land Leveling

WU Yan—xia

(Depantment of Automobile Engineering, Dezhou University, Dezhou Shandong 253023, China)

Abstract: As the special field geonomy drawing software, The Surfer software has the ideal functions of data processing and 3—D display. This work is to introduce how to use Visual Basic ++ 6 0 programming language as the developing platform to call Surfer8 0 control. Fully utilizing the plotting function of Surfer, the 3D wireframe map(3D surface map)before and after level ground is generated, the dynamic display of three—dimensional curved surface is realized, which could be used to evaluate effect of laser—controlled land leveling visually.

Key words: Laser—controlled land leveling; Vb++6 0; Surfer8 0; animation demonstration; evaluation

(上接第32页)

[4] 周持中.斐波那契—卢卡斯序列及其应用[M].长沙:湖南科学技术出版社,1993.

Discussion on the Recursive Array Coming from the Game of Nine Interlinks

LIU Yao—bin

(Department of Mathematical, Dezhou University, Dezhou Shandong 253023, China)

Abstract: Nine interlinks is a very interesting game in china. It has a long history in china. In this article, we give a class of linear recursive array according to the resolution of the nine interlinks, and give three proofs of its general term.

Key words: nine interlinks; recursive array; characteristic polynomial