# 通州区2024—2025学年第一学期高三年级期中质量检测

## 数学参考答案及评分标准

2024年11月

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.

| 题号 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | C | A | A | C | D | C | B | C | B |

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

(11)$(0,1)\cup(1,+\infty)$　(12)4　(13)2　(14)3，$a\geqslant 1$　(15)①，②，④

注：第(14)题第一空3分，第二空2分；第(15)题全部选对得5分，不选或有错选得0分，其他得3分。

三、解答题共6小题，共85分.

(16)(本小题满分14分)

解：(Ⅰ)$f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x$

$=2\sin x\cos x$

$=\sin 2x.$

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$f(x)$的最小正周期为 $\pi$. ………………………………… 6分

(Ⅱ)由题意可知，$M$、$N$两点的坐标为$(t,f(t))$，$(t,g(t))$，

则$|MN|=|f(t)-g(t)|$.

即$|MN|=\left|\sqrt{3}\sin(2t-\frac{\pi}{6})\right|$.

因为$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以$2t-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，

所以$\sqrt{3}\sin(2t-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$，

所以$|MN|$在$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$时的最大值为$\sqrt{3}$. ………………………………… 14分

(17)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)由 $a^2+b^2-c^2=-ab$ 可知,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $C$ 为$\triangle ABC$ 的内角,所以 $C\in(0,\pi)$.

所以$\angle C=\frac{2\pi}{3}$.

由 $b\sin C=2\sqrt{3}\sin B$ 变形得$\frac{b}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得 $c=2\sqrt{3}$. …………………………………………… 6 分

(Ⅱ)选择条件②:$b\sin C=\sqrt{3}$

因为 $b\sin C=\sqrt{3}$,$\angle C=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $b=2$.

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得,$a^2+2a-8=0$,

解得 $a=2$,$a=-4$(舍).

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 13 分

选择条件③:$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin B=\frac{1}{2}$.

因为 $b\sin C=2\sqrt{3}\sin B$,

所以 $b=2$.

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得,

$a^2+2a-8=0$.

解得 $a=2$,$a=-4$(舍)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 13 分

(18)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $S_n=2a_n-1, n\in\mathbf{N}^*$, ①

所以有 $a_1=1, S_{n+1}=2a_{n+1}-1$. ②

②-①得 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以数列$\{a_n\}$成以 1 为首项,以 2 为公比的等比数列.

所以 $a_n=2^{n-1}$. …………………………………………………………………… 5 分

又数列$\{b_n\}$是等差数列,且 $b_1=a_1, b_2+b_4=6$.

所以 $b_1=1, d=1$.

所以 $b_n=n$. ……………………………………………………………………… 8 分

(Ⅱ)因为 $c_n=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数},\\ b_n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$

设数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和为 $T_{2n}$,

所以 $T_{2n}=a_1+b_2+a_3+b_4+\cdots+a_{2n-1}+b_{2n}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=\frac{4^n}{3}+n^2+n-\frac{1}{3}$. …………………………………………………………… 13 分

(19)(本小题满分 15 分)

解:(Ⅰ)$f'(x)=3x^2-3a$,

由题意函数 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值 8 得,

$\begin{cases}f'(2)=12-3a=0,\\ f(2)=8-6a+b=8,\end{cases}$

解得 $a=4, b=24$.

经检验 $a=4, b=24$ 满足条件. …………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)$f'(x)=3x^2-12$.

令 $f'(x)=3x^2-12=0$,解得 $x_1=-2,x_2=2$.

列表得:

| $x$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(2,3)$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 24 | 单调递减 | 8 | 单调递增 | 15 |

所以当 $x=2$ 时 $f(x)$ 取得最小值为 8,$x=0$ 时 $f(x)$ 取得最大值为 24. ………… 10 分

(Ⅲ)曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(0,24)$.

设点 $P(m,n)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点,则点 $P(m,n)$ 关于 $(0,24)$ 的对称点为 $(-m,48-n)$,

因为 $P(m,n)$ 在 $y=f(x)$ 图象上,

所以 $n=m^3-12m+24$.

又 $f(-m)=(-m)^3-12(-m)+24=48-n$.

所以点 $(-m,48-n)$ 也在 $y=f(x)$ 图象上.

所以曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形. …………………………………………………… 15 分

(20)(本小题满分 15 分)

解:(Ⅰ)当 $a=0$ 时,$f(x)=2x\ln x$. $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=2\ln x+2$,

令 $f'(x)=2\ln x+2=0$,解得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$,单调递减区间为 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$. …………… 5 分

(Ⅱ)当 $a=-1$ 时,$f(x)=(2x+1)\ln x$,$f'(x)=2\ln x+2+\frac{1}{x}$.

设曲线 $y=f(x)$ 的切点为 $(t,f(t))(t>0)$,

则切线方程为 $y-(2t+1)\ln t=(2\ln t+\frac{1}{t}+2)(x-t)$,

若切线过原点,则有 $\ln t-2t-1=0$.

令 $g(t)=\ln t-2t-1$,则 $g'(t)=\frac{1}{t}-2$.

$g(t)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减,在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增,

所以对任意 $t>0$,$g(t)\leqslant g(\frac{1}{2})=-\ln 2-2<0$.

所以方程 $\ln t-2t-1=0$ 无解.

综上可知,曲线 $y=f(x)$ 在点的 $(t,f(t))$ 切线不过原点. ………………………… 10 分

(Ⅲ)曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有两个不同的交点,

等价于 $f(x)=-x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有两个不同的解,

即 $a=2x+\frac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有两个不同的解,

设 $h(x)=2x+\frac{x}{\ln x}$,则 $h'(x)=2+\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{(\ln x+1)(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$.

当 $x>\sqrt{e}$,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$ 单调递增,当 $1<x<\sqrt{e}$,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 的最小值为 $4\sqrt{e}$.

当 $x\to 1$ 时,$h(x)\to+\infty$,

当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to+\infty$,

要使 $a=2x+\frac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有两个不同的解,

只需使 $a>4\sqrt{e}$ 即可.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $a>4\sqrt{e}$. ………………………………………… 15 分

(21)(本小题满分 15 分)

解:(Ⅰ)$a_1=1,a_2=2,a_3=4,a_4=5,a_5=7,a_6=8$. ………………………………… 3 分

(Ⅱ)$b_6$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项,$b_7$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

为 $a_{23}=[23\sqrt{2}]=32=2^5=b_6$;

下面证明 $b_7$ 不是数列$\{a_n\}$中的项

因为$[(n+1)\sqrt{2}]\geqslant[n\sqrt{2}]$,

所以数列$\{a_n\}$不单调递减,

$a_{45}=[45\sqrt{2}]=63<2^6=b_7$,$a_{46}=[46\sqrt{2}]=65>2^6=b_7$,

所以 $b_7$ 不是数列$\{a_n\}$中的项. ………………………………………………………… 8 分

(Ⅲ)先证明存在无穷多个正整数 $k$ 使得$\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,(其中$\{x\}$表示 $x$ 的小数部分)

假设只有有限个正整数 $k$ 使得$\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

不妨设 $k_0$ 是使$\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$成立的最大正整数,

则有$\{\frac{2^{k_0+m}}{\sqrt{2}}\}\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{2}}(m=1,2,\cdots)$

即 $2^{m-1}\{\frac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\}\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$①.

因为$\{\frac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\}$是正的常数,故当 $m$ 足够大时,有 $2^{m-1}\{\frac{2^{k_0+1}}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,与①矛盾.

所以存在无穷多个正整数 $k$ 使得$\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

对于每个满足$\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$的正整数 $k$,令 $n=[\frac{2^k}{\sqrt{2}}]+1$,

则有$\frac{2^k}{\sqrt{2}}<n=[\frac{2^k}{\sqrt{2}}]+1=\frac{2^k}{\sqrt{2}}-\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\}+1<\frac{2^k}{\sqrt{2}}-(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+1=\frac{2^k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

所以有$\frac{2^k}{\sqrt{2}}<n<\frac{2^k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

即 $2^k<n\sqrt{2}<2^k+1$.

从而 $a_n=[n\sqrt{2}]=2^k=b_{k+1}$.

所以数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的公共项有无数多个. ………………………………… 15 分

**注:解答题学生若有其它解法,请酌情给分.**