北京市朝阳区2023-2024学年度第一学期期末质量检测

高三数学

2024.1

（考试时间120分钟 满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid \log_3 x<1\}$，则$A\cup B=$

（A）$[0,3]$　（B）$[0,3)$　（C）$(0,3)$　（D）$(0,3]$

（2）设$a\in\mathbf{R}$，若复数$(a-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$在复平面内对应的点位于虚轴上，则$a=$

（A）-4　（B）-1　（C）1　（D）4

（3）若$0<a<1$，则

（A）$a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{2}}$　（B）$2^a<3^a$

（C）$\log_a\frac{1}{2}>\log_a\frac{1}{3}$　（D）$\sin a>\cos a$

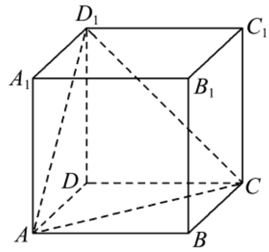
（4）在$\triangle ABC$中，若$a=\sqrt{2},\ \angle A=\frac{\pi}{6},\ \cos C=-\frac{1}{3}$，则$c=$

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{8\sqrt{3}}{9}$　（D）$\frac{8}{3}$

（5）在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(0,1),\ B(2,1)$，动点P满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则$|OP|$的最大值为

（A）1　（B）$\sqrt{2}$　（C）2　（D）$\sqrt{2}+1$

（6）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E是平面$A_1B_1C_1D_1$内一点，且$EB\,/\!/$平面ACD_1，则$\tan\angle DED_1$的最大值为



（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）1

（C）$\sqrt{2}$　（D）2

（7）设函数$f(x)=x+\frac{m}{x-2}\ (m\in\mathbf{R})$的定义域为$(-1,2)$，则“$-3<m\leqslant 0$”是“$f(x)$在区间$(-1,2)$内有且仅有一个零点”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）设抛物线 C 的焦点为 F，点 E 是 C 的准线与 C 的对称轴的交点，点 P 在 C 上，若 $\angle PEF=30^\circ$，则 $\sin\angle PFE=$

（A）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　　　　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（9）根据经济学理论，企业生产的产量受劳动投入、资本投入和技术水平的影响，用 Q 表示产量，L 表示劳动投入，K 表示资本投入，A 表示技术水平，则它们的关系可以表示为 $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$，其中 $A>0,K>0,L>0,0<\alpha<1,0<\beta<1$. 当 A 不变，K 与 L 均变为原来的 2 倍时，下面结论中正确的是

（A）存在 $\alpha<\frac{1}{2}$ 和 $\beta<\frac{1}{2}$，使得 Q 不变

（B）存在 $\alpha>\frac{1}{2}$ 和 $\beta>\frac{1}{2}$，使得 Q 变为原来的 2 倍

（C）若 $\alpha\beta=\frac{1}{4}$，则 Q 最多可变为原来的 2 倍

（D）若 $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}$，则 Q 最多可变为原来的 2 倍

（10）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=4\sqrt{2}$，当 $\lambda\in\mathbf{R}$ 时，$|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}|$ 的最小值为 4．若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{AP}=\sin^2\theta\,\overrightarrow{AB}+\cos^2\theta\,\overrightarrow{AC}$，其中 $\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，则 $|\overrightarrow{MP}|$ 的最大值为

（A）2　　　　　　（B）4

（C）$2\sqrt{5}$　　　　　　（D）$4\sqrt{2}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(x+\frac{2}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为________.（用数字作答）

（12）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，S_n 为其前 n 项和，且 a_2,a_4,a_8 成等比数列，则 $a_4=$________，$S_n=$________.

（13）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线过点 $(-2,1)$，则其离心率为________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1],\\ 2|x-a|-2, & x\in(1,3].\end{cases}$ 当 $a=0$ 时， $f(x)$ 的最大值为________；若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的一个取值为________.

（15）中国传统数学中开方运算暗含着迭代法，清代数学家夏鸾翔在其著作《少广缒凿》中用迭代法给出一个“开平方捷术”，用符号表示为：已知正实数 N，取一正数 a_1 作为 $\sqrt{N}$ 的第一个近似值，定义 $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{N}{a_n}, & n为奇数,\\ \dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}, & n为偶数,\end{cases}$ 则 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是 $\sqrt{N}$ 的一列近似值．当 $N=10,\ a_1=3$ 时，给出下列四个结论：

① $a_3^2>10$；

② $a_4a_5>10$；

③ $\exists n\geqslant 2$， $a_{2n-1}<a_{2n+1}$；

④ $\forall n\geqslant 2$，$|a_{2n}^2-10|<|a_{2n-1}^2-10|$．

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+m\ (m\in\mathbf{R})$ 的图象过原点.

（Ⅰ）求 m 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上单调递增，求正数 t 的最大值.

（17）（本小题 14 分）

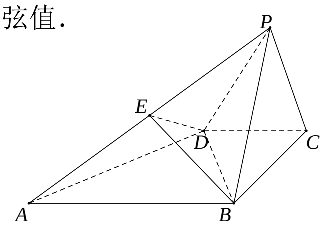
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB/\!/DC,\ \angle ABC=90^\circ$，$AB=2DC$，侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$， E 是 PA 的中点.

（Ⅰ）求证： $DE/\!/$ 平面 PBC；

（Ⅱ）已知 $AB=BC=2$， $PB=PC$，再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使四棱锥 $P-ABCD$ 唯一确定，求二面角 $E-BD-C$ 的余弦值.

条件①： $AP=2\sqrt{2}$；

条件②： $AP\perp BC$；



条件③：直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

某学校开展健步走活动，要求学校教职员工上传 11 月 4 日至 11 月 10 日的步数信息．教师甲、乙这七天的步数情况如图 1 所示．

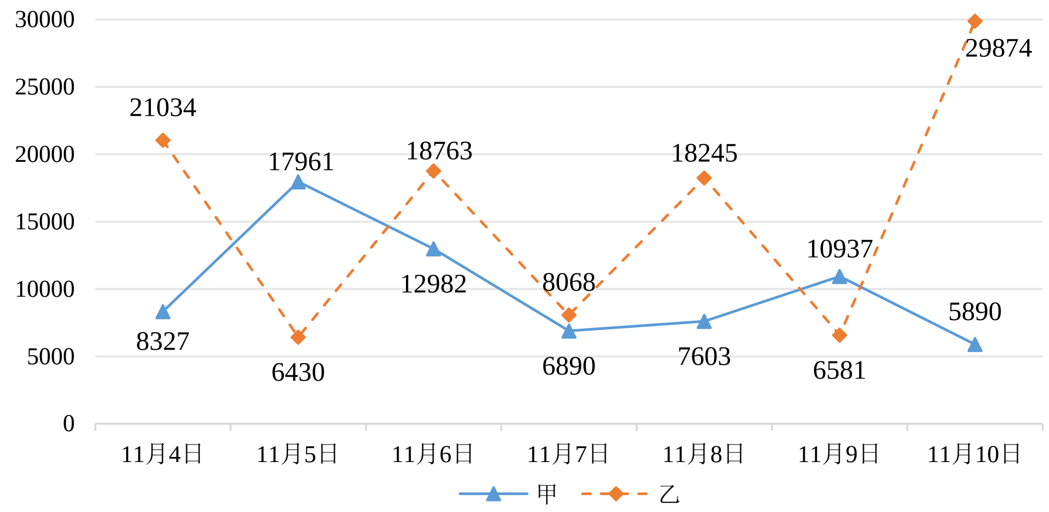


图 1

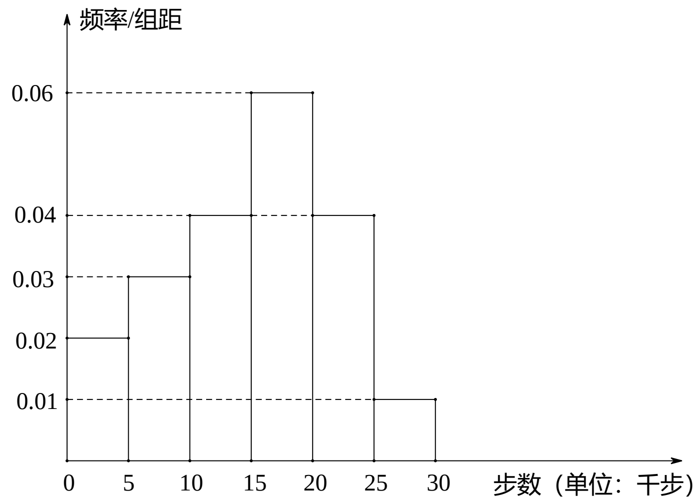


图 2

（Ⅰ）从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取一天，求这一天甲比乙的步数多的概率；

（Ⅱ）从 11 月 4 日至 11 月 10 日中随机选取三天，记乙的步数不少于 20000 的天数为 X ，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）根据 11 月 4 日至 11 月 10 日某一天的数据制作的全校 800 名教职员工步数的频率分布直方图如图 2 所示．已知这一天甲与乙的步数在全校 800 名教职员工中从多到少的排名分别为第 501 名和第 221 名，判断这是哪一天的数据．（只需写出结论）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x-1\,(a\in\mathbf{R})$ ．

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线为 x 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内的极值点个数；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有零点 t，求证：$t<a^2$．

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左顶点为 A，上顶点为 B，原点 O 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\triangle AOB$ 的面积为 1．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(-2,1)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 C,D，过点 C 作 x 轴的垂线分别与直线 AD,AB 交于点 M,N．判断点 N 是否为线段 CM 的中点，说明理由．

（21）（本小题 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的无穷递增数列，对于 $k\in\mathbf{N}^*$，定义集合 $B_k=\{i\in\mathbf{N}^*\mid a_i<k\}$，设 b_k 为集合 B_k 中的元素个数，若 $B_k=\varnothing$ 时，规定 $b_k=0$．

（Ⅰ）若 $a_n=2^n$，写出 b_1,b_2,b_3 及 b_{10} 的值；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）设集合 $S=\{s\mid s=n+a_n,n\in\mathbf{N}^*\},\ T=\{t\mid t=n+b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$，求证：$S\cup T=\mathbf{N}^*$ 且 $S\cap T=\varnothing$．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）