北京市朝阳区2024~2025学年度第一学期期中质量检测

高三数学参考答案

2024.11

一、选择题(共10小题,每小题4分,共40分)

(1)A　(2)C　(3)D　(4)C　(5)C

(6)B　(7)C　(8)B　(9)A　(10)B

二、填空题(共5小题,每小题5分,共25分)

(11) $-1+\mathrm{i}$　(12) $\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{3}$　(13) $(1,0)$(答案不唯一)

(14) 90　(15)②③④

三、解答题(共6小题,共85分)

(16)(本小题13分)

解:(Ⅰ)由 $a\cos C + c\cos A = 2a$,

得 $\sin A\cos C + \sin C\cos A = 2\sin A$.

所以 $\sin(A+C) = 2\sin A$.

由 $A + C = \pi - B$,

得 $\sin B = 2\sin A$.

又因为 $A \in (0,\pi)$,所以 $\sin A > 0$.

所以$\frac{\sin B}{\sin A} = 2$.

可得$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = 2$. ……………………………………………………… 5分

(Ⅱ)因为 $A = \frac{\pi}{6}$, $c = \sqrt{3}$,

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + 3 - 2\sqrt{3}b\cos\frac{\pi}{6}$.

又由(Ⅰ)可知,$b = 2a$,

所以 $a^2 = 4a^2 + 3 - 4\sqrt{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

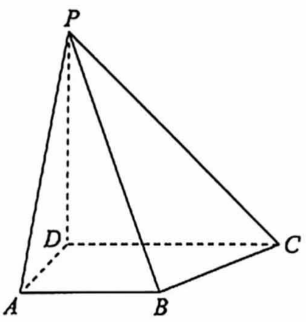
整理得 $3a^2 - 6a + 3 = 0$,即 $a^2 - 2a + 1 = 0$.

所以 $a = 1$. 所以 $b = 2a = 2$.

所以$\triangle ABC$面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ………… 13分

(17)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,



所以 $PD\perp AB$.

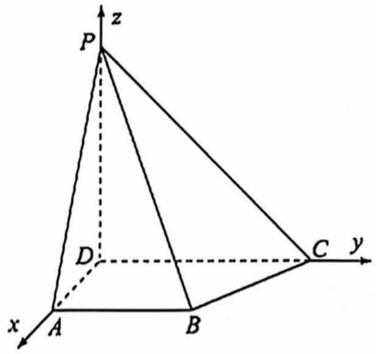
又因为 $AB/\!/CD$,$AD\perp CD$,

所以 $AD\perp AB$.

又因为 $AD\cap PD=D$,

所以 $AB\perp$ 平面 PAD. ································ 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$PD\perp AD$,$PD\perp CD$,$AD\perp CD$,如图所示,以 D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$,则



$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,3,0)$,$P(0,0,3)$.

则 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{AP}=(-2,0,3)$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y=0,\\ -2x+3z=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}y=0,\\ x=\dfrac{3}{2}z.\end{cases}$

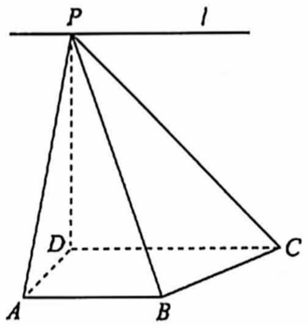
令 $z=2$,则 $\boldsymbol{m}=(3,0,2)$.

又因为 $AD\perp$ 平面 PCD,所以 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$ 是平面 PCD 的一个法向量.

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ,则

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{DA}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{6}{\sqrt{13}\times 2}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. ················ 12 分

(Ⅲ)直线 $AB/\!/l$. 理由如下:



因为 $AB/\!/CD$,$CD\subset$ 平面 PCD,$AB\not\subset$ 平面 PCD,

所以 $AB/\!/$ 平面 PCD.

又因为 $AB\subset$ 平面 PAB,平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$,

所以 $AB/\!/l$. ·· 15 分

(18)(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$,

$x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减,

$x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得最小值 0. ··· 5 分

(Ⅱ)$f'(x)=a-\dfrac{1}{x+1}(x>-1)$.

(1)当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)$无极值.

(2)当 $a>0$ 时，令$f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}-1$.

当 x 变化时，$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-1,\frac{1}{a}-1)$	$\frac{1}{a}-1$	$(\frac{1}{a}-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表知，当 $x=\frac{1}{a}-1$ 时，$f(x)$取得极小值.

综上，a 的取值范围为$(0,+\infty)$. ………………………………………… 13 分

(19)(本小题 14 分)

解：(Ⅰ)由 $\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

得$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$.

则$f(\frac{\pi}{2})=0$. ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)$f(x)=\sin 2\omega x\cos\varphi+2\cos^2\omega x\sin\varphi$，

$=\sin 2\omega x\cos\varphi+(\cos 2\omega x+1)\sin\varphi$

$=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi+\sin\varphi$，

$=\sin(2\omega x+\varphi)+\sin\varphi$.

选择条件①：

因为$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$上单调递增，且 $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $y=f(x)$的图象的对称轴，又当 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取到最小值，

所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $2\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

所以 $\omega=1$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)+\sin\varphi$.

又因为$f(-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)+\sin\varphi=-1+\sin\varphi$，

所以 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

选择条件③：

因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的对称轴，又 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$ 上单调递减，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $2\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

所以 $\omega=1$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)+\sin\varphi$.

又因为 $f(-\frac{\pi}{6})=\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)+\sin\varphi=-1+\sin\varphi$，

所以 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. ………………………………………… 14 分

(20)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)由 $f(x)=e^x+\cos x$，得 $f(0)=2$ 且 $f'(x)=e^x-\sin x$，

所以 $f'(0)=1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为：$y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

即 $x-y+2=0$. ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)①当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，

所以 $f(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点.

②当 $-\pi<x\leqslant0$ 时，$e^x>0$，$\sin x\leqslant0$，

所以 $f'(x)=e^x-\sin x>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,0]$ 上单调递增.

又 $f(-\pi)=e^{-\pi}-1<0$，$f(0)=2>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,0]$ 上仅有一个零点.

综上，$f(x)$ 在区间 $(-\pi,+\infty)$ 上的零点个数为 1. ………………………… 9 分

(Ⅲ)设 $g(x)=f(x)-x-2(x>0)$，即 $g(x)=e^x+\cos x-x-2$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x-1$. 设 $g'(x)=h(x)$，

$h'(x)=e^x-\cos x$.

因为 $x>0$ 时，$e^x>1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，所以 $h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增，即 $g'(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

故 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

故 $g(x)>g(0)=0$，

所以 $f(x)-x-2>0$.

因为 $m>0$，所以 $f(m)-m-2>0$，又 $f(m)=n$，

所以 $n-m>2$. ………………………………………………………… 15 分

(21)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)数列 A 不是 T 数列，理由如下：

对于数列 A，

因为 $a_6=5$，$a_5=3<a_6$，

且对任意的正整数 $j\leqslant4$，有 $a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_5\geqslant a_4+a_5=6>a_6$，

所以数列 A 不满足性质②.

所以数列 A 不是 T 数列.

数列 B 是 T 数列，理由如下：

对于数列 B，

因为 $a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=4$，$a_5+a_6=8$，$a_7+a_8=16$，

所以数列 B 满足性质①.

又因为 $a_2=a_1$，$a_3=a_1+a_2$，$a_4=a_3$，$a_5=a_3+a_4$，$a_6=a_5$，$a_7=a_6$，$a_8=a_5+a_6+a_7$，

所以数列 B 满足性质②.

所以数列 B 是 T 数列. ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)(ⅰ)假设存在 $i\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，使得 $a_{2i}=a_{2i+1}=3\times2^{i-2}$.

由性质①，可得 $a_{2i+2}=2^{i+1}-a_{2i+1}=2^{i+1}-3\times2^{i-2}=5\times2^{i-2}$.

由性质②，存在正整数 $j\leqslant2i+1$，使得 $a_{2i+2}=a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_{2i+1}$，

又因为 $a_{2i+1}<a_{2i+2}$，所以 $j\neq2i+1$，故 $j<2i+1$.

所以 $a_{2i+2}-a_{2i+1}=a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_{2i}\geqslant a_{2i}$.

而 $a_{2i}+a_{2i+1}=6\times2^{i-2}>a_{2i+2}=5\times2^{i-2}$，矛盾.

所以 $a_{2i}=3\times2^{i-2}$ 与 $a_{2i+1}=3\times2^{i-2}$ 不能同时成立. ……………………………… 9 分

(ⅱ)由性质①，当 $i=1$ 时，可得 $a_1+a_2=2$，

又因为 a_1,a_2 为正整数，所以 $a_1=a_2=1$.

由性质②，对任意的 $i\in\{1,2,3,\cdots,2n-1\}$，有 $a_{i+1}\geqslant a_i$.

因为对任意 $i\in\{2,3,\cdots,n-1\}$, $a_{2i+2}=2^{i+1}-a_{2i+1}\leqslant 2^{i+1}-a_{2i}$,

所以 $a_{2i}+a_{2i+2}\leqslant 2^{i+1}$.

所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_2+(a_4+a_6)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n})$

$\leqslant 1+2^3+2^5+\cdots+2^n=1+\dfrac{2^{n+2}-8}{3}=\dfrac{2^{n+2}-5}{3}$.

当 $a_1=a_2=1$, $a_{4s-1}=a_{4s}=a_{4s+1}=2^{2s-1}$, $a_{4s+2}=3\times 2^{2s-1}$ $(s=1,2,3,\cdots,\dfrac{n-1}{2})$ 时,

上述不等式取到等号,且此时数列 A 满足①和②,是 T 数列.

综上, $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的最大值为 $\dfrac{2^{n+2}-5}{3}$. …………………………… 15 分