# 昌平区 2023－2024 学年第一学期高三年级期末质量抽测

**数学试卷　　　　　2024.1**

**本试卷共 5 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将答题卡交回.**

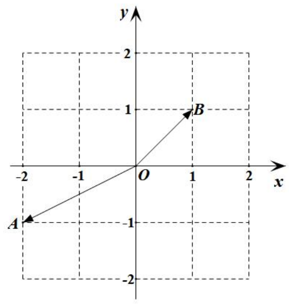
## 第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-1>0\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$(-1,\ 1)$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$(-\infty,-1]$　　（D）$[1,\ +\infty)$

（2）在复平面内，复数 $z_1$ 和 $z_2$ 对应的点分别为 $A,B$，则 $z_1\cdot z_2=$




（A）$-1-3\mathrm{i}$

（B）$-3-\mathrm{i}$

（C）$1-3\mathrm{i}$

（D）$3+\mathrm{i}$

（3）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

（A）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（4）已知 $(1-3x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2+a_4=$

（A）$-32$　　（B）32　　（C）495　　（D）585

（5）下列函数中，在区间 $(0,\ 2)$ 上为减函数的是

（A）$y=2^x$　　（B）$y=\sin x$　　（C）$y=\dfrac{x}{1-x}$　　（D）$y=\log_{0.5}(-x^2+4x)$

（6）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则"$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)<f(x)$"是"$f(x)$ 为减函数"的

（A）充分必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分而不必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知点 $P$ 在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上，点 $A$ 的坐标为 $(-1,\sqrt{3})$，$O$ 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是

（A）$[-3,3]$　　（B）$[3,5]$　　（C）$[1,9]$　　（D）$[3,7]$

（8）“三斜求积术”是我国宋代的数学家秦九韶用实例的形式提出的，其实质是根据三角形的三边长 $a,b,c$ 求三角形面积 $S$，即 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$．现有面积为 $3\sqrt{15}$ 的 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，则 $\triangle ABC$ 的周长是

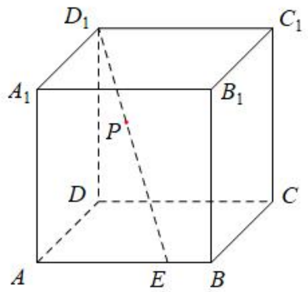
（A）9　　（B）12　　（C）18　　（D）36

（9）已知函数 $f(x)=2^{\sin x}-2^{\cos x}$，则

（A）$f(\frac{\pi}{4}+x)=f(\frac{\pi}{4}-x)$　　（B）$f(x)$ 不是周期函数

（C）$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上存在极值　　（D）$f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有且只有一个零点

（10）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$ 为线段 $AB$ 上的点，且 $\frac{AE}{EB}=3$，点 $P$ 在线段 $D_1E$ 上，则点 $P$ 到直线 $AD$ 距离的最小值为




（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（C）$\frac{3}{5}$

（D）1

## 第二部分（非选择题　共 110 分）

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

（11）已知 $\sin x=-\frac{3}{5}, x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，则 $\tan x=$_____.

（12）若抛物线 $x^2=4y$ 上的点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离为 8，则 $M$ 到 $x$ 轴的距离是_____.

（13）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和$S_n$满足$S_n = 2a_n - a_1$，且$a_1$，$a_2 + 1$，$a_3$成等差数列，

则$a_1 =$______；$a_n =$______.

（14）若函数$f(x) = \begin{cases} 2^x - m, x \leqslant 1, \\ \ln x, x > 1 \end{cases}$在定义域上不是单调函数，则实数$m$的一个取值可以为

______.

（15）已知数列$\{a_n\}$，$a_1 = a\ (0 < a < 1)$，$a_{n+1} = a^{a_n}$．给出下列四个结论：

① $a_2 \in (a,1)$；

② $a_{10} > a_9$；

③ $\{a_{2n}\}$为递增数列；

④ $\forall n \in \mathbf{N}^*$，使得$\left|a_{n+1} - a_n\right| < 1 - a$.

其中所有正确结论的序号是______.

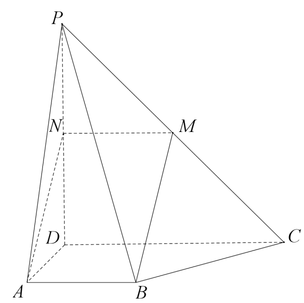
**三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

（16）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥$P - ABCD$中，$PD \perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$是直角梯形，$AD \perp DC$，$AB /\!/ DC$，$AB = AD = 2$，$DC = PD = 4$，点$N$是$PD$的中点，直线$PC$交平面$ABN$于点$M$.

（Ⅰ）求证：点$M$是$PC$的中点；

（Ⅱ）求二面角$A - MN - P$的大小.



（17）（本小题 14 分）

在 $\Delta ABC$ 中，$b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$.

（Ⅰ）求角 $A$ 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $\Delta ABC$ 存在且唯一确定，求 $\Delta ABC$ 的面积.

条件①：$a=7$；

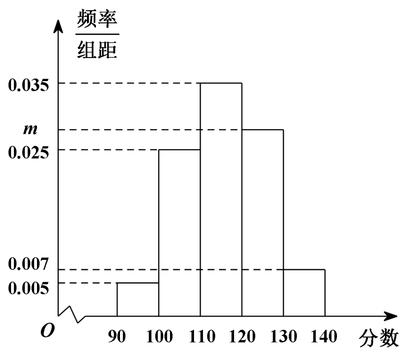
条件②：$c=8$；

条件③：$\cos C=\dfrac{1}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

某汽车生产企业对一款新上市的新能源汽车进行了市场调研，统计该款车车主对所购汽车性能的评分，将数据分成 5 组：$[90,100),[100,110),[110,120),[120,130),[130,140]$，并整理得到如下频率分布直方图：




（Ⅰ）求 $m$ 的值；

（Ⅱ）该汽车生产企业在购买这款车的车主中任选 3 人，对评分低于 110 分的车主送价值 3000 元的售后服务项目，对评分不低于 110 分的车主送价值 2000 元的售后服务项目. 若为这 3 人提供的售后服务项目总价值为 $X$ 元，求 $X$ 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）用随机抽样的方法从购买这款车的车主中抽取 10 人，设这 10 人中评分不低于 110 分的人数为 $Y$，问 $k(k=0，1，2，\dots，10)$ 为何值时，$P(Y=k)$ 的值最大？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $M(2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的方程；

（Ⅱ）设过点 $T(t,0)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $E$ 有两个不同的交点 $A,B$（均不与点 $M$ 重合），若以线段 $AB$ 为直径的圆恒过点 $M$，求 $t$ 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{2-x}-x+1$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）判断 $f(x)$ 极值点的个数，并说明理由.

（21）（本小题 15 分）

已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷正整数数列，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，集合 $X=\{-1,0,1\}$.

若存在 $x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,k$，使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=t$，则称 $t$ 为 $k-$可表数，称集合 $T=\{t\mid t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,x_i\in X,i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $k-$可表集.

(Ⅰ)若 $k=10$，$a_i=2^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,k$，判定 $31,1024$ 是否为 $k-$可表数，并说明理由；

(Ⅱ)若 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，证明：$n\leqslant\frac{3^k-1}{2}$；

(Ⅲ)设 $a_i=3^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,k$，若 $\{1,2,\cdots,2024\}\subseteq T$，求 $k$ 的最小值.