昌平区 2023－2024 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷参考答案　　　　　2024.1

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分 .

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	A	B	C	D	B	D	C	D	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）$\frac{3}{4}$　　　（12）7　　　（13）2　2^n

（14）1（答案不唯一）　　　（15）①②④

注：第（13）题第一空 3 分,第二空 2 分;第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB // DC$， $AB \not\subset$ 平面PCD， $CD \subset$ 平面PCD，

所以 $AB //$ 平面 PCD.　……………1 分

因为直线 PC 交平面 ABN 于点 M .

所以平面 $ABMN \cap$ 平面 $PCD = MN$.　……………2 分

所以 $AB // MN$.　……………3 分

所以 $CD // MN$.　……………4 分

因为点 N 是 PD 的中点，

所以点 M 是 PC 的中点.　……………5 分

（Ⅱ）因为 $PD \perp$ 平面$ABCD$，

所以 $PD \perp DA$， $PD \perp DC$.

因为 $AD \perp DC$，

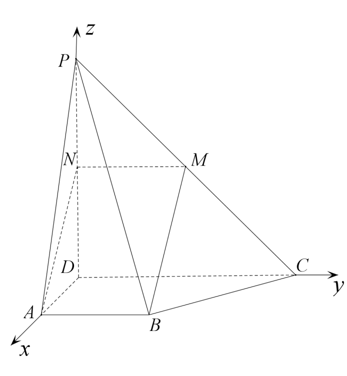
所以 DP, DA, DC 两两相互垂直.　……6 分

如图，以点 D 为坐标原点，

建立空间直角坐标系 $D - xyz$. 则 $D(0,0,0)$，

$A(2,0,0)$， $B(2,2,0)$， $C(0,4,0)$， $P(0,0,4)$，

……7 分



所以 $N(0,0,2)$， $M(0,2,2)$．

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{AN}=(-2,0,2)$．　　……………8 分

设平面 $ABMN$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}2y=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$$　　……………9 分

令 $x=1$，于是 $z=1$， $y=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$．　　……………10 分

又因为平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$．　　……………11 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．　　……………12 分

由题知，二面角 $A-MN-P$ 是钝角，

所以二面角 $A-MN-P$ 的大小为 $\frac{3\pi}{4}$.　　……………13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，　　……………1 分

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos A$.　　……………2 分

所以 $\sin(B+C)=2\sin A\cos A$．　　……………3 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=2\sin A\cos A$.　　……………4 分

又 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.　　……………5 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.　　……………6 分

（Ⅱ）选择条件①③：

因为 $\cos C=\frac{1}{7}$， $0<C<\pi$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.　　……………8 分

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{7\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=8$. …………… 10 分

因为$\sin B=\sin[\pi-(C+\dfrac{\pi}{3})]=\sin(C+\dfrac{\pi}{3})=\sin C\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos C\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, …………… 12 分

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times7\times8\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$. …………… 14 分

选条件②③：

因为$\cos C=\dfrac{1}{7}$，$0<C<\pi$，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ……… 8 分

由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}=7$. ………10 分

由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以$b^2-2b-15=0$. ……………12 分

解得$b=5$或$b=-3$（舍）.

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times7\times5\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$. …………… 14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（I）依题意，$(0.005+0.025+0.035+m+0.007)\times10=1$，所以$m=0.028$. . . . . . 3 分

（II）由题意可知，X的可能取值为$\{6000,7000,8000,9000\}$.

任选 1 人，估计认为该款车性能的评分不低于 110 分的概率为0.7. ……… 4 分

$P(X=6000)=C_3^3\times0.7^3\times0.3^0=0.343$； ……… 5 分

$P(X=7000)=C_3^2\times0.7^2\times0.3=0.441$； ……… 6 分

$P(X=8000)=C_3^1\times0.7\times0.3^2=0.189$； ……… 7 分

$P(X=9000)=C_3^0\times 0.7^0\times 0.3^3=0.027$.　　………8 分

所以 X 的分布列为

X	6000	7000	8000	9000
P	0.343	0.441	0.189	0.027

所以 $E(X)=6000\times 0.343+7000\times 0.441+8000\times 0.189+9000\times 0.027=6900$ 元.

……………10 分

（Ⅲ）k=7 时，$P(Y=k)$ 的值最大.　　…………… 13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$a=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　…………… 1 分

因为 $a^2=b^2+c^2$，　　…………… 2 分

所以 $c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$.　　……………4 分

所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.　　…………… 5 分

（Ⅱ）（1）当 $l\perp x$ 轴时，设直线 l 的方程为 $x=t(-2<t<2)$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

整理得 $y=\pm\sqrt{2-\frac{t^2}{2}}$.　　…………… 6 分

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{2-\frac{t^2}{2}}=2-t$.

解得 $t=\frac{2}{3}$ 或 $t=2$（舍）.　　……………7 分

（2）当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-t)$（$k\neq 0$）.　…… 8 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-t)\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2tx+(2k^2t^2-4)=0$.　　…………… 9 分

所以 $x_1+x_2=\frac{4k^2t}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2t^2-4}{1+2k^2}$，$\Delta=8(4k^2-k^2t^2+2)>0$.　…… 11 分

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $MA \perp MB$.

所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. …………… 12 分

又因为 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 - 2, y_1) \cdot (x_2 - 2, y_2)$

$= (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2$

$= (x_1 - 2)(x_2 - 2) + k(x_1 - t) \times k(x_2 - t)$

$= (k^2 + 1)x_1 x_2 - (k^2 t + 2)(x_1 + x_2) + k^2 t^2 + 4$

$= (k^2 + 1) \times \dfrac{2k^2 t^2 - 4}{1 + 2k^2} - (k^2 t + 2) \times \dfrac{4k^2 t}{1 + 2k^2} + k^2 t^2 + 4$

所以 $(k^2 + 1)(2k^2 t^2 - 4) - 4k^2 t(k^2 t + 2) + (k^2 t^2 + 4)(1 + 2k^2) = 0$，

得 $3k^2 t^2 - 8k^2 t + 4k^2 = 0$，即 $(3t^2 - 8t + 4)k^2 = 0$. …………… 13 分

所以 $3t^2 - 8t + 4 = 0$. 解得 $t = 2$（舍）或 $t = \dfrac{2}{3}$. …………… 14 分

经检验，当 $t = \dfrac{2}{3}$ 时 $\Delta > 0$ 满足题意.

综上，$t = \dfrac{2}{3}$. …………… 15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{2-x} - 1$， …………… 2 分

所以直线的斜率 $k = f'(2) = -1$，$f(2) = 3$. …………… 3 分

所以切线方程为 $y = -x + 5$. …………… 4 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x) = f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{2-x} - 1$，

所以 $g'(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{2-x}$. …………… 6 分

令 $g'(x) = 0$，即 $x^2 - 4x + 2 = 0$，解得 $x = 2 - \sqrt{2}$ 或 $x = 2 + \sqrt{2}$. …………… 7 分

当 x 变化时，$g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	–	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty,2-\sqrt{2})$，$(2+\sqrt{2},+\infty)$； ……………8 分

单调递减区间是 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$. …………… 9 分

（III）（1）当 $x<2-\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 上单调递增.

$g(2-\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}}-1>\frac{1}{2}e-1>0$，$g(0)=-1<0$， ……………10 分

所以存在唯一 $x_1\in(0,2-\sqrt{2})$，使 $g(x_1)=0$. ……………11 分

【当 $x<2-\sqrt{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 上单调递增.

$g(2-\sqrt{2})>g(1)=e-1>0$，$g(-1)=-3e^3-1<0$， ……………10 分

所以存在唯一 $x_1\in(-1,2-\sqrt{2})$，使 $g(x_1)=0$.】 ……………11 分

（2）当 $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上单调递减.

$g(2-\sqrt{2})>0$，$g(2+\sqrt{2})<g(2)=-1<0$， ……………12 分

所以存在唯一 $x_2\in(2-\sqrt{2},2)$，使 $g(x_2)=0$. ……………13 分

（3）当 $x>2+\sqrt{2}$ 时，$(-x^2+2x)<0, e^{2-x}>0,$ 故 $g(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上无零点. …………… 14 分

综上，当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 有两个极值点. …………… 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $-1\times 2^0+0\times(2^1+2^2+2^3+2^4+2^6+2^7+2^8+2^9)+1\times 2^5=31$，

所以 31 为 $k-$ 可表数. …………… 2 分

又 $x_1\times 2^0+x_2\times 2^1+\cdots+x_{10}\times 2^9\leqslant 1\times 2^0+1\times 2^1+\cdots+1\times 2^9=2^{10}-1=1023<1024$，

所以 1024 不是 $k-$ 可表数. …………… 4 分

（Ⅱ）由题设，$0=0\times a_1+0\times a_2+\cdots+0\times a_k$，所以 $0\in T$． …………… 5 分

若 $s\in T$，则存在 $x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,k$，使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=s$，

所以 $-(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k)=-s$，且 $-x_i\in X$．

所以 $-s\in T$． …………… 6 分

因为 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，所以 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}\subseteq T$．

所以集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 中元素的个数不超过集合 T 的元素个数. …… 7 分

又因为集体 T 中元素个数至多为 3^k， …………. 8 分

所以 $2n+1\leqslant 3^k$，即 $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$． ……………9 分

(Ⅲ) 由题设，对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$．

又 $x_1\times 1+x_2\times 3+x_3\times 3^2+\cdots+x_{m-1}\times 3^{m-2}\leqslant 1\times 1+1\times 3+1\times 3^2+\cdots+1\times 3^{m-2}=\dfrac{3^{m-1}-1}{2}$，

所以 $k>m-1$．所以 $k\geqslant m$．

而 $1\times 1+1\times 3+1\times 3^2+\cdots+1\times 3^{m-1}=\dfrac{3^m-1}{2}$，

即当 $n=\dfrac{3^m-1}{2}$ 时，取 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$，$n$ 为 $m-$ 可表数. ……10 分

因为 $2(1+3+3^2+\cdots+3^{m-1})=2\times\dfrac{3^m-1}{2}=3^m-1$，

由三进制基本事实可知，对任意的 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$，存在 $r_i\in\{0,1,2\},i=1,2,\cdots,m$，

使 $p=r_1\times 3^0+r_2\times 3^1+\cdots+r_m\times 3^{m-1}$．

所以 $p-\dfrac{3^m-1}{2}=(r_1\times3^0+r_2\times3^1+\cdots+r_m\times3^{m-1})-(3^0+3^1+\cdots+3^{m-1})$

$=(r_1-1)\times3^0+(r_2-1)\times3^1+\cdots+(r_m-1)\times3^{m-1}$. ...... 11 分

令 $x_i=r_i-1$，则有 $x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,m$.

设 $t=p-\dfrac{3^m-1}{2}$，则 $-\dfrac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，

由 p 任意性，对任意的 $-\dfrac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，$t\in\mathbf{Z}$，都有

$t=x_1\times3^0+x_2\times3^1+\cdots+x_m\times3^{m-1},x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,m$ . ... 12 分

又因为 $n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，所以对于任意的 $-n\leqslant t\leqslant n$，$t\in\mathbf{Z}$，t 为 $m-$可表数.

综上，可知 k 的最小值为 m，其中 m 满足 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$. ...... 13 分

又因为当 $n=2024$ 时，$\dfrac{3^7-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^8-1}{2}$.

所以 k 的最小值为 8 . ... 15 分