

# 初三数学

2024. 01

考生须知

1. 本试卷共 6 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 120 分钟。
2. 在答题卡上准确填写学校名称、准考证号,并将条形码贴在指定区域。
3. 题目答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,请将答题卡交回。

## 一、选择题(共 16 分,每题 2 分)

第 1-8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个.

1. 2023 航空航天大兴论坛于 11 月 15 日至 17 日在北京大兴国际机场临空经济区举办,共设置了“数字民航”“电动航空”“商业航天”“通航维修”四场专题论坛.若某位航天科研工作者随机选择一个专题论坛参与活动,则他选中“电动航空”的概率是

- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{8}$

2. 下列图形中,是中心对称图形而不是轴对称图形的为



A.



B.



C.



D.

3. 关于一元二次方程  $x^2-3x-1=0$  的根的情况,下列说法正确的是

- A. 有两个不相等的实数根                      B. 有两个相等的实数根  
C. 没有实数根                      D. 无法判断

4. 抛物线  $y=(x-2)^2+1$  的对称轴是

- A.  $x=-2$                       B.  $x=2$                       C.  $x=-1$                       D.  $x=1$

5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,将抛物线  $y=3x^2$  先向右平移 4 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度,得到的抛物线是

- A.  $y=3(x+4)^2-1$                       B.  $y=3(x+4)^2+1$                       C.  $y=3(x-4)^2-1$                       D.  $y=3(x-4)^2+1$

准考证号

姓名

班级

学校

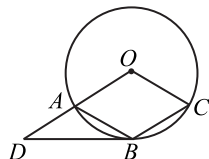
题  
答  
要  
不  
内  
线  
封  
密

6. 若圆的半径为 1, 则  $60^\circ$  的圆心角所对的弧长为

- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\pi$                       C.  $\frac{\pi}{6}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$

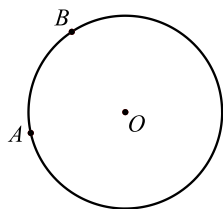
7. 如图, 菱形  $OABC$  的顶点  $A, B, C$  在  $\odot O$  上, 过点  $B$  作  $\odot O$  的切线交  $OA$  的延长线于点  $D$ . 若  $\odot O$  的半径为 2, 则  $BD$  的长为

- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$   
C.  $2\sqrt{3}$                       D. 4



8. 如图, 点  $A, B$  在  $\odot O$  上, 且点  $A, O, B$  不在同一条直线上, 点  $P$  是  $\odot O$  上一个动点 (点  $P$  不与点  $A, B$  重合), 在点  $P$  运动的过程中, 有如下四个结论:

- ①恰好存在一点  $P$ , 使得  $\angle PAB = 90^\circ$ ;  
②若直线  $OP$  垂直于  $AB$ , 则  $\angle OAP = \angle OBP$ ;  
③  $\angle APB$  的大小始终不变.



上述结论中, 所有正确结论的序号是

- A. ①②                      B. ①③                      C. ②③                      D. ①②③

## 二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 若  $(a-3)x^2 - 3x - 4 = 0$  是关于  $x$  的一元二次方程, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

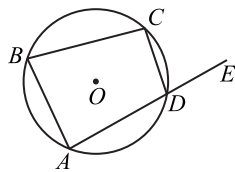
10. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + m = 0$  有一个根为 1, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若点  $(2, y_1), (4, y_2)$  在抛物线  $y = 2(x-3)^2 - 4$  上,

则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (填“>”, “=”或“<”).

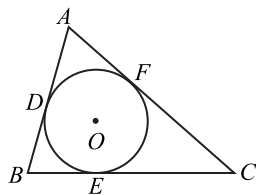
12. 如图, 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 点  $E$  在  $AD$  的延长线上,

若  $\angle CDE = 80^\circ$ , 则  $\angle ABC$  的度数是\_\_\_\_\_°.



13. 如图,  $\triangle ABC$  的内切圆  $\odot O$  与  $AB, BC, CA$  分别相切于点  $D, E, F$ ,

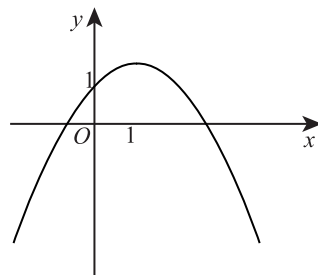
若  $AD = 2, BC = 6$ , 则  $\triangle ABC$  的周长为\_\_\_\_\_.



14. 写出一个过点 $(0,1)$ 且当自变量 $x>0$ 时,函数值 $y$ 随 $x$ 的增大而增大的二次函数的解析式\_\_\_\_\_.

15. 杭州亚运会的吉祥物“琮琤”“宸宸”“莲莲”组合名为“江南忆”,出自唐朝诗人白居易的名句“江南忆,最忆是杭州”,它融合了杭州的历史人文、自然生态和创新基因.吉祥物一开售,就深受大家的喜爱.经统计,某商店吉祥物“江南忆”6月份的销售量为1200件,8月份的销售量为1452件,设吉祥物“江南忆”6月份到8月份销售量的月平均增长率为 $x$ ,则可列方程为\_\_\_\_\_.

16. 如图,在平面直角坐标系 $xOy$ 中,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ( $a<0$ )的图象经过点 $(0,1)$ , $(2,1)$ . 给出下面三个结论:



① $2a-b=0$ ;

② $a+b+c>1$ ;

③关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c-m=0$ ( $m<1$ )有两个异号实数根.

上述结论中,所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题(共68分,第17-21题每题5分,第22题6分,第23题5分,第24-26题每题6分,第27-28题,每题7分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明的过程.

17. 解方程: $x^2+8x=9$ .

18. 已知 $a$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的一个根,求代数式 $(a-1)^2+a(a-2)$ 的值.

19. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-x+2m-2=0$ 有两个实数根.

(1)求 $m$ 的取值范围;

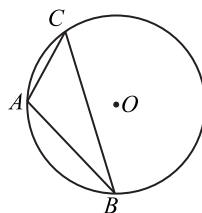
(2)当 $m$ 取最大整数值时,求方程的根.

20. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(1,0)$ , $(0,-3)$ .

(1)求抛物线的解析式;

(2)求该抛物线的顶点坐标.

21. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=45^\circ$ , $AB=2$ , $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,求 $\odot O$ 的半径.



22. 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日,第 19 届亚运会在杭州举行. 中国队以 201 枚金牌、111 枚银牌、71 枚铜牌的优异成绩,位居奖牌榜首. 为弘扬体育运动精神,某校对八、九年级学生进行了杭州亚运会知识竞赛(测试满分为 100 分,得分  $x$  均为不小于 80 的整数),并从中分别随机抽取了 20 名学生的测试成绩,整理、描述和分析如下(成绩得分用  $x$  表示,共分成四组:A.  $80 \leq x < 85$ ; B.  $85 \leq x < 90$ ; C.  $90 \leq x < 95$ ; D.  $95 \leq x \leq 100$ ).

a. 八年级 20 名学生的成绩是:

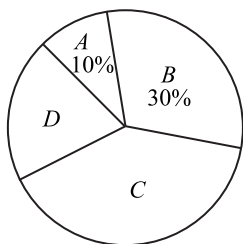
80, 82, 83, 83, 85, 85, 86, 87, 89, 90, 90, 91, 94, 95, 95, 95, 95, 96, 99, 100.

b. 九年级 20 名学生的成绩在 C 组中的数据是: 90, 90, 91, 92, 92, 93, 93, 94.

c. 八、九年级抽取的学生竞赛成绩的平均数、中位数、众数如下:

年级	平均数	中位数	众数
八年级	90	90	$m$
九年级	90	$n$	100

d. 九年级抽取的学生竞赛成绩扇形统计图如下:



根据以上信息,解答下列问题:

- 写出表中  $m, n$  的值及九年级抽取的学生竞赛成绩在 D 组的人数;
- 若该校九年级共 400 人参加了此次知识竞赛活动,估计九年级竞赛成绩不低于 90 分的人数是\_\_\_\_\_;
- 为了进一步弘扬体育运动精神,学校决定组织学生开展亚运精神宣讲活动,准备从九年级抽取的竞赛成绩在 D 组的学生中,随机选取一名担任宣讲员,另一名担任主持人. 若甲、乙是抽取的成绩在 D 组的两名学生,用画树状图或列表的方法,求甲、乙两人同时被选上的概率.

23. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y=kx+b(k \neq 0)$  的图象经过点  $A(-1, 2)$  和  $B(1, 4)$ .

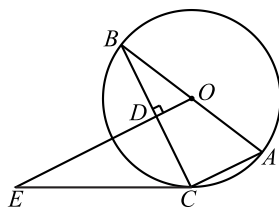
(1) 求该函数的解析式;

(2) 当  $x > 2$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y = \frac{1}{2}x + n$  的值小于函数  $y = kx + b(k \neq 0)$  的值且大于 5, 直接写出  $n$  的值.

24. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  $C$  在  $\odot O$  上, 连接  $AC, BC$ , 过点  $O$  作  $OD \perp BC$  于点  $D$ , 过点  $C$  作直线  $CE$  交  $OD$  延长线于点  $E$ , 使得  $\angle E = \angle B$ .

(1) 求证:  $CE$  为  $\odot O$  的切线;

(2) 若  $DE = 6, CE = 3\sqrt{5}$ , 求  $OD$  的长.



25. 如图 1, 某公园一个圆形喷水池, 在喷水池中心  $O$  处竖直安装一根高度为 1.25m 的水管  $OA$ ,  $A$  处是喷头, 喷出水流沿形状相同的曲线向各个方向落下, 喷出水流的运动路线可以看作是抛物线的一部分.

建立如图 2 所示的平面直角坐标系, 测得喷出水流距离喷水池中心  $O$  的最远水平距离  $OB$  为 2.5m, 水流竖直高度的最高处位置  $C$  距离喷水池中心  $O$  的水平距离  $OD$  为 1m.

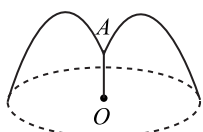


图 1

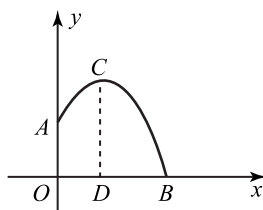


图 2

(1) 求喷出水流的竖直高度  $y$  (m) 与距离水池中心  $O$  的水平距离  $x$  (m) 之间的关系式, 并求水流最大竖直高度  $CD$  的长;

(2) 安装师傅调试时发现, 喷头竖直上下移动时, 抛物线形水流随之竖直上下移动 (假设抛物线水流移动时, 保持对称轴及形状不变), 若水管  $OA$  的高度增加 0.64m 时, 则水流离喷水池中心  $O$  的最远水平距离为 \_\_\_\_\_ m.

26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $(2, m)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) 上, 设抛物线的对称轴为  $x = t$ .

(1) 当  $m = c$  时, 求  $t$  的值;

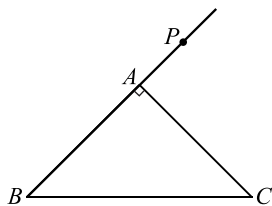
(2) 点  $(-1, y_1), (3, y_2)$  在抛物线上, 若  $c < m$ , 请比较  $y_1, y_2$  的大小, 并说明理由.

27. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$ , 点  $P$  为  $BA$  的延长线上一点, 连接  $PC$ , 以  $P$  为中心, 将线段  $PC$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $PD$ , 连接  $BD$ .

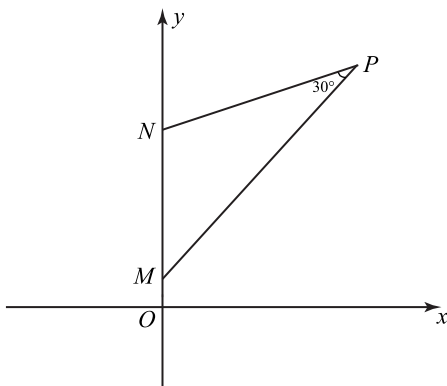
(1) 依题意补全图形;

(2) 求证:  $\angle ACP = \angle DPB$ ;

(3) 用等式表示线段  $BC, BP, BD$  之间的数量关系, 并证明.



28. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $M(0, t), N(0, t+2)$ , 对于坐标平面内的一点  $P$ , 给出如下定义: 若  $\angle MPN = 30^\circ$ , 则称点  $P$  为线段  $MN$  的“亲近点”.



(1) 当  $t = 0$  时,

① 在点  $A(2\sqrt{3}, 0), B(3, 2), C(-2\sqrt{3}, 2), D(-1, -3)$  中, 线段  $MN$  的“亲近点”的是\_\_\_\_\_;

② 点  $P$  在直线  $y = 1$  上, 若点  $P$  为线段  $MN$  的“亲近点”, 则点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_;

(2) 若直线  $y = -\sqrt{3}x - 3$  上总存在线段  $MN$  的“亲近点”, 则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.