

# 高三数学

2024.1

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集  $U = \{x | 0 < x < 4\}$ ，集合  $A = \{x | 0 < x < 2\}$ ，则  $\complement_U A =$

- (A)  $\{x | 2 < x < 4\}$  (B)  $\{x | 2 < x \leq 4\}$  (C)  $\{x | 2 \leq x < 4\}$  (D)  $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$

(2) 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = i$ ，则  $z$  的共轭复数  $\bar{z} =$

- (A)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (B)  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  (C)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (D)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

(3)  $(x + \frac{1}{x})^5$  的展开式中， $x$  的系数为

- (A) 1 (B) 5 (C) 10 (D) 20

(4) 设等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数， $S_n$  为其前  $n$  项和，若  $a_1 = 2$ ， $a_2 a_3 a_4 = a_9$ ，则  $S_3 =$

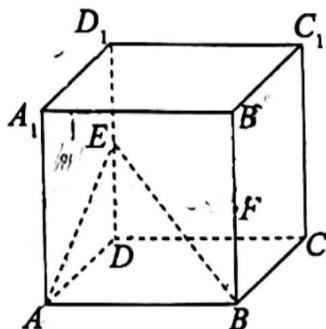
- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14

(5) 已知非零向量  $a, b$  满足  $|a| = |b|$ ，且  $a \cdot b = 0$ ，对任意实数  $\lambda, \mu$ ，下列结论正确的是

- (A)  $(\lambda a - \mu b) \cdot (\lambda a - \mu b) = 0$  (B)  $(\lambda a - \mu b) \cdot (\mu a + \lambda b) = 0$   
 (C)  $(\lambda a - \mu b) \cdot (\lambda a + \mu b) = 0$  (D)  $(\lambda a + \mu b) \cdot (\mu a + \lambda b) = 0$

(6) 如图，在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = 2$ ， $E, F$  分别是  $DD_1, BB_1$  的中点。用过点  $F$  且平行于平面  $ABE$  的平面去截正方体，得到的截面图形的面积为

- (A)  $2\sqrt{5}$   
 (B)  $\sqrt{6}$   
 (C)  $\sqrt{5}$   
 (D)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$



(7) 已知  $a > 0, b > 0$ , 则“ $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ ”是“ $\frac{1}{2^a} < \frac{1}{2^b}$ ”的

(A) 充分不必要条件

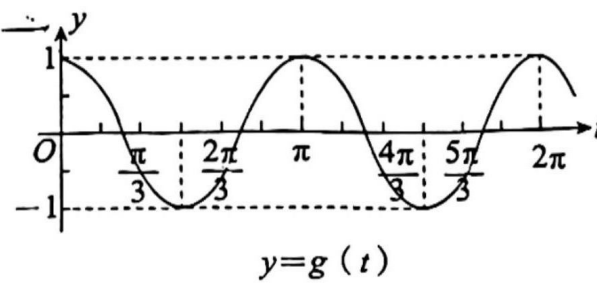
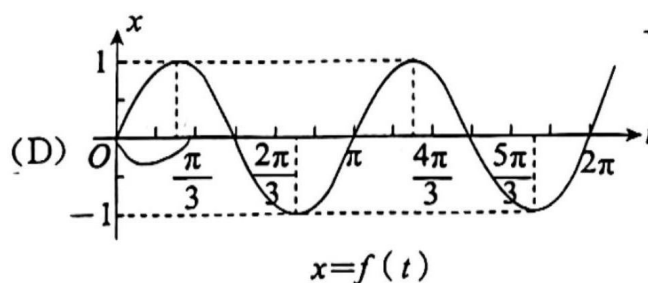
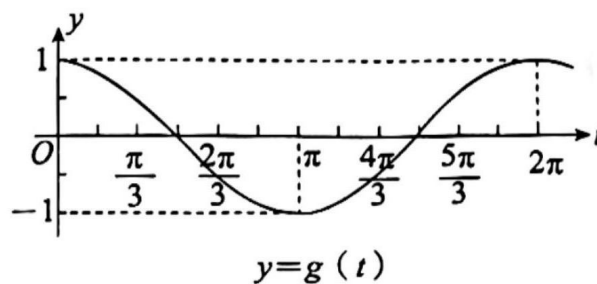
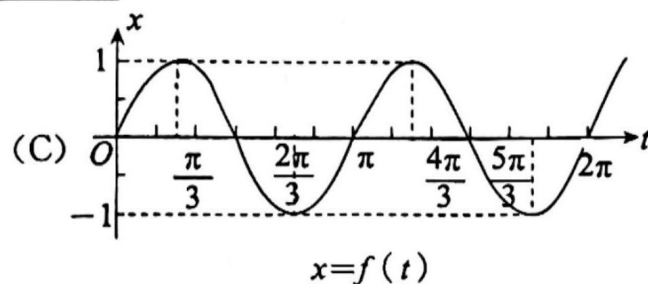
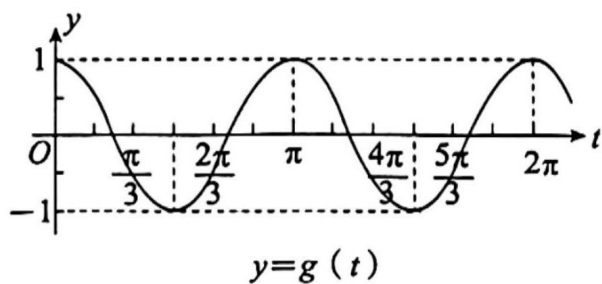
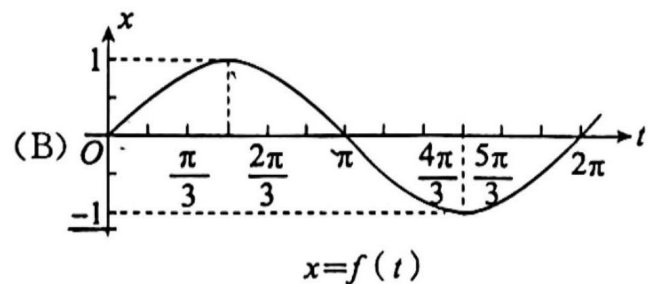
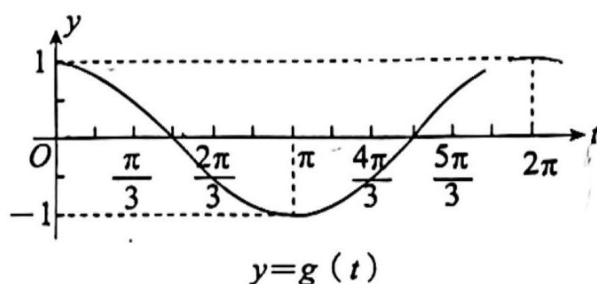
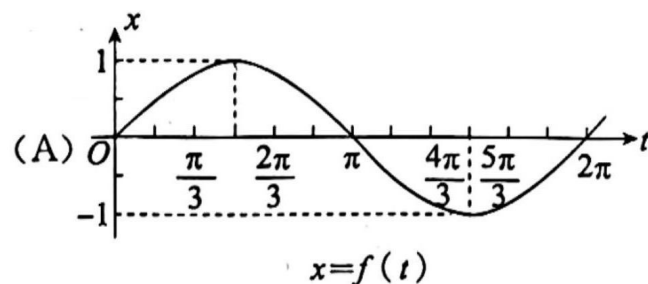
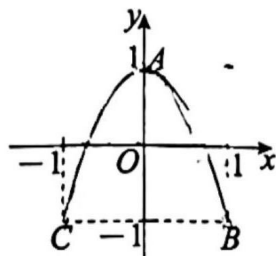
(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(8) 一粒子在平面上运动的轨迹为抛物线的一部分, 在该平面上建立直角坐标系后,

该粒子的运动轨迹如图所示. 在  $t=0$  时刻, 粒子从点  $A(0, 1)$  出发, 沿着轨迹曲线运动到  $B(1, -1)$ , 再沿着轨迹曲线途经  $A$  点运动到  $C(-1, -1)$ , 之后便沿着轨迹曲线在  $B, C$  两点之间循环往复运动. 设该粒子在  $t$  时刻的位置对应点  $P(x, y)$ , 则坐标  $x, y$



(9) 已知线段  $AB$  的长度为 10,  $M$  是线段  $AB$  上的动点 (不与端点重合). 点  $N$  在圆心为  $M$ , 半径为  $MA$  的圆上, 且  $B, M, N$  不共线, 则  $\triangle BMN$  的面积的最大值为

(A)  $\frac{25}{2}$

(B)  $\frac{25}{4}$

(C)  $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(D)  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

(10) 设函数  $f(x) = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$ , 对于下列四个判断:

① 函数  $f(x)$  的一个周期为  $\pi$ ;

② 函数  $f(x)$  的值域是  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ ;

③ 函数  $f(x)$  的图象上存在点  $P(x, y)$ , 使得其到点  $(1, 0)$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

④ 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  时, 函数  $f(x)$  的图象与直线  $y=2$  有且仅有一个公共点

正确的判断是

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

## 第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

(12) 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程是 \_\_\_\_\_; 直线  $x=1$  与

双曲线相交于  $M, N$  两点, 则  $|MN| =$  \_\_\_\_\_.

(13) 已知函数  $f(x) = \sin(x + \varphi)$  ( $\varphi > 0$ ), 若  $f(-\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{2})$ , 则  $\varphi$  的一个取值为 \_\_\_\_\_.

(14) 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < a, \\ x^2 + a, & x \geq a. \end{cases}$

① 若  $a = -2$ , 则  $f(x)$  的最小值为 \_\_\_\_\_;

② 若  $f(x)$  有最小值, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

(15) 一般地, 对于数列  $\{a_n\}$ , 如果存在一个正整数  $t$ , 使得当  $n$  取每一个正整数时, 都有  $a_{n+t} = a_n$ , 那么数列  $\{a_n\}$  就叫做周期数列,  $t$  叫做这个数列的一个周期. 给出下列四个判断:

① 对于数列  $\{a_n\}$ , 若  $a_i \in \{1, 2\}$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ), 则  $\{a_n\}$  为周期数列;

② 若  $\{a_n\}$  满足:  $a_{2n} = a_{2n+2}, a_{2n-1} = a_{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则  $\{a_n\}$  为周期数列;

③ 若  $\{a_n\}$  为周期数列, 则存在正整数  $M$ , 使得  $|a_n| < M$  恒成立;

④ 已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为非零整数,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若存在正整数  $M$ , 使得  $|S_n| < M$  恒成立, 则  $\{a_n\}$  为周期数列.

其中所有正确判断的序号是 \_\_\_\_\_.



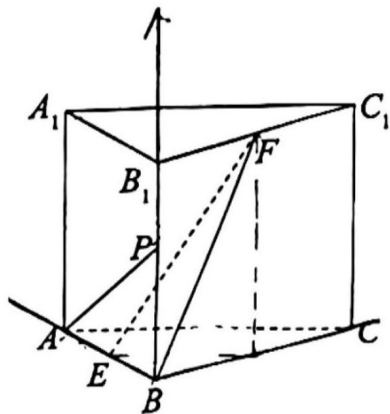
三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 14 分)

如图,在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, $\angle ABC=90^\circ$ , $AB=BC=BB_1=2$ , $E,F$  分别为  $AB,B_1C_1$  的中点。

(I)求证: $EF\parallel$ 平面  $ACC_1A_1$ ;

(II)若点  $P$  是棱  $BB_1$  上一点,且直线  $AP$  与平面  $BEF$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{5}$ ,求线段  $BP$  的长。



(17)(本小题 13 分)

在  $\triangle ABC$  中, $BC=4,AC=\sqrt{13},AB=1$

(I)求  $\angle B$ ;

(II)若  $D$  为  $BC$  边上一点,再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,使  $\triangle ABD$  存在且唯一确定,求  $\triangle ABD$  的面积。

条件①: $\angle ADB=\frac{\pi}{4}$ ;

条件②: $AD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ;

条件③: $\triangle ABD$  的周长为  $3+\sqrt{3}$ 。

注:如果选择的条件不符合要求,第(II)问得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分。

(18)(本小题 13 分)

某科目进行考试时,从计算机题库中随机生成一份难度相当的试卷.规定每位同学有三次考试机会,一旦某次考试通过,该科目成绩合格,无需再次参加考试,否则就继续参加考试,直到用完三次机会.现从 2022 年和 2023 年这两年的第一次、第二次、第三次参加考试的考生中,分别随机抽取 100 位考生,获得数据如下表:

	2022 年		2023 年	
	通过	未通过	通过	未通过
第一次	60 人	40 人	50 人	50 人
第二次	70 人	30 人	60 人	40 人
第三次	80 人	20 人	$m$ 人	$(100-m)$ 人

假设每次考试是否通过相互独立.

- (I)从 2022 年和 2023 年第一次参加考试的考生中各随机抽取一位考生,估计这两位考生都通过考试的概率;
- (II)小明在 2022 年参加考试,估计他不超两次考试该科目成绩合格的概率;
- (III)若 2023 年考生成绩合格的概率不低于 2022 年考生成绩合格的概率,则  $m$  的最小值为下列数值中的哪一个?(直接写出结果)

$m$ 的值	83	88	93
--------	----	----	----

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 左、右顶点分别为  $A, B$ ,

$$|AF| = 2 + \sqrt{3}, |BF| = 2 - \sqrt{3}.$$

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设  $O$  是坐标原点,  $M, N$  是椭圆  $C$  上不同的两点, 且关于  $x$  轴对称,  $E, G$  分别为线段  $OM, MB$  的中点, 直线  $AE$  与椭圆  $C$  交于另一点  $D$ . 证明:  $D, G, N$  三点共线.

(20)(本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - ke^x, k > 0$ .

(I) 若  $k=1$ , 求曲线  $y=f(x)$  在  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 若  $1 \leq k < 2$ , 求证: 函数  $y=f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有极大值  $m$ , 且  $-3 < m < 1$ .

(21)(本小题 15 分)

若有穷数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n > 4)$  满足:  $a_i + a_{n+1-i} = c (c \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n)$ , 则称此数列具有性质  $P_c$ .

(I) 若数列  $A: -2, a_2, a_3, 2, 6$  具有性质  $P_c$ , 求  $a_2, a_3, c$  的值;

(II) 设数列  $A$  具有性质  $P_0$ , 且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n, n$  为奇数, 当  $a_i, a_j > 0 (1 \leq i, j \leq n)$  时, 存在正整数  $k$ , 使得  $a_j - a_i = a_k$ , 求证: 数列  $A$  为等差数列;

(III) 把具有性质  $P_c$ , 且满足  $|a_{2k-1} + a_{2k}| = m (k \in \mathbf{N}^*, k \leq \frac{n}{2}, m$  为常数) 的数列  $A$  构成的集合记作  $T_c(n, m)$ . 求出所有的  $n$ , 使得对任意给定的  $m, c$ , 当数列  $A \in T_c(n, m)$  时, 数列  $A$  中一定有相同的两项, 即存在  $a_i = a_j (i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$ .