大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C	（2）A	（3）B	（4）D	（5）B
（6）A	（7）C	（8）D	（9）D	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）16　　（12）2

（13）$2,0,-1$（答案不唯一）　　（14）1　$[6-2\sqrt{3},6+2\sqrt{3}]$

（15）① ③ ④

注：第（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；

第（15）题只写一个且正确 2 分，只写两个且正确 3 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

所以 $CD\perp BB_1$．　……1 分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 D 为 AB 的中点，$CA=CB=\sqrt{5}$，

所以 $CD\perp AB$．　……1 分

所以 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1．　……1 分

因为 $CD\subset$ 平面 CDE，

所以平面 $CDE\perp$ 平面 ABB_1A_1．……1 分

（Ⅱ）取 A_1B_1 的中点 D_1，连结 D_1F．

因为 D 为 AB 的中点，

所以在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$DD_1//BB_1$．

所以 $DD_1\perp$ 平面 ABC．　……1 分

所以 $DD_1\perp AB$，$DD_1\perp DC$．

由（Ⅰ）知 $CD\perp AB$．

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $D(0,0,0)$，$B(-1,0,0)$，$B_1(-1,0,2)$，$E(1,0,1)$，$C(0,2,0)$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$．……2 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2z=0, \\ x+2y=0. \end{cases}$ ……1 分

令 $y=1$，则 $x=-2$.

于是 $\boldsymbol{n}=(-2,1,0)$. ……1 分

又 $\overrightarrow{CE}=(1,-2,1)$， ……1 分

设直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{CE}\rangle|=|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CE}|}|$ ……2 分

$=|\dfrac{(-2)\times1+1\times(-2)+0\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}|$

$=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$. ……1 分

所以直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$. ……1 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由余弦定理知，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ……1 分

$=\dfrac{1^2+2^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times1\times2}$

$=-\dfrac{3}{4}$. ……1 分

在△ABC 中，$C\in(0,\pi)$.

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$ ……1 分

$=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. ……1 分

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ ……1 分

$=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. ……1 分

（Ⅱ）选择条件②：$\angle B=\dfrac{\pi}{3}+\angle A$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$， ……2 分

知 $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin(A+\dfrac{\pi}{3})}$.

所以 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=2\sin A$. ……1 分

所以 $\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}=2\sin A$． ……2 分

所以 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$． ……1 分

因为在 $\triangle ABC$ 中， $A\in(0,\pi)$，

所以 $\angle A=\frac{\pi}{6}$． ……1 分

选择条件③： $\angle C=2\angle A$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$， ……2 分

知 $\frac{1}{\sin A}=\frac{c}{\sin 2A}$．

所以 $\frac{1}{\sin A}=\frac{c}{2\sin A\cos A}$． ……1 分

所以 $c=2\cos A$． ……1 分

由余弦定理知 $c=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$．

所以 $c=\sqrt{3}$． ……1 分

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ……1 分

因为在 $\triangle ABC$ 中， $A\in(0,\pi)$，

所以 $\angle A=\frac{\pi}{6}$． ……1 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据题中数据，该地区参与 A 快递公司调查的问卷共 120 份，

样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的问卷共 $29+47=76$ 份，

所以样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的频率为 $\frac{76}{120}=\frac{19}{30}$，

估计该地区客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率 $\frac{19}{30}$． 3 分

（Ⅱ） X 的所有可能取值为 $0,1,2$． ……1 分

记事件 C 为“从该地区 A 快递公司的样本调查问卷中随机抽取 1 份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”，事件 D 为“从该地区 B 快递公司的样本调查问卷中随机抽取 1 份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”.

由题设知，事件 C,D 相互独立，且

$P(C)=\frac{24+56}{120}=\frac{2}{3}$， $P(D)=\frac{12+48}{80}=\frac{3}{4}$． ……1 分

所以 $P(X=0)=P(\overline{C}\,\overline{D})=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{12}$， ……1 分

$P(X=1)=P(\overline{C}D\cup C\overline{D})=(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})=\frac{5}{12}$， ……1 分

$P(X=2)=P(CD)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$． ……1 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{2}=\frac{17}{12}$． ……2 分

（Ⅲ）答案不唯一．……3 分

答案示例 1：小王选择 A 快递公司合适，理由如下：

根据样本数据，估计 A 快递公司配送时效评价为 “优秀”的概率是 $\frac{29}{120}$，估计 B 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是 $\frac{1}{5}$，因为 $\frac{29}{120}>\frac{1}{5}$，故小王选择 A 快递公司合适．

答案示例 2：小王选择 B 快递公司合适，理由如下：

由（Ⅰ）知，估计 A 快递公司配送时效评价为 “良好”以上的概率是 $\frac{19}{30}$；

由样本数据可知，估计 B 快递公司配送时效评价为 “良好”以上的概率是 $\frac{16+40}{80}=\frac{56}{80}=\frac{7}{10}$，因为 $\frac{19}{30}<\frac{7}{10}$，故小王选择 B 快递公司合适．

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$．

由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 解得 $c=\sqrt{3}$． ……2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=1$． ……1 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ……1 分

（Ⅱ）依题意，直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=k(x-4)(k\neq 0)$． ……1 分

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$． ……1 分

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，则

$\Delta>0$ 且 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+1}$， $x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2+1}$． ……1 分

所以直线 MB 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，所以 $P(1,\frac{-y_1}{x_1-2})$． ……2 分

直线 NA 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，所以 $Q(0,\dfrac{2y_2}{x_2+2})$． ⋯⋯1 分

所以 ΔOAQ 的面积为 $S_{\Delta OAQ}=\dfrac{1}{2}\times 2\times|y_Q|=|\dfrac{2y_2}{x_2+2}|$， ⋯⋯1 分

ΔOTP 的面积为 $S_{\Delta OTP}=\dfrac{1}{2}\times 4\times|y_P|=|\dfrac{2y_1}{x_1-2}|$． ⋯⋯1 分

所以 $\dfrac{S_{\Delta OAQ}}{S_{\Delta OTP}}=|\dfrac{2y_2}{x_2+2}|\times|\dfrac{x_1-2}{2y_1}|=|\dfrac{y_2(x_1-2)}{y_1(x_2+2)}|=|\dfrac{k(x_2-4)(x_1-2)}{k(x_1-4)(x_2+2)}|$

$=|\dfrac{x_1x_2-4x_1-2x_2+8}{x_1x_2+2x_1-4x_2-8}|=|\dfrac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+8-2x_1}{x_1x_2-4(x_1+x_2)-8+6x_1}|$ ⋯⋯1 分

$$=|\frac{\dfrac{64k^2-4}{4k^2+1}-2\times\dfrac{32k^2}{4k^2+1}+8\times\dfrac{4k^2+1}{4k^2+1}-2x_1}{\dfrac{64k^2-4}{4k^2+1}-4\times\dfrac{32k^2}{4k^2+1}-8\times\dfrac{4k^2+1}{4k^2+1}+6x_1}|$$

$$=|\frac{\dfrac{32k^2+4}{4k^2+1}-2x_1}{\dfrac{-3(32k^2+4)}{4k^2+1}+6x_1}|$$ ⋯⋯1 分

$=\dfrac{1}{3}$ ． ⋯⋯1 分

所以 ΔOAQ 与 ΔOTP 的面积之比为定值．

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=ax+\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$．

所以 $f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}+a$． ⋯⋯2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 0，

所以 $f'(0)=0$． ⋯⋯1 分

所以 $a=2$． ⋯⋯1分

（Ⅱ）当 $a=4$ 时，$f(x)=4x+\ln\dfrac{1-x}{1+x}$．

因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$， ⋯⋯1 分

且 $f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}-4x=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}-4x=-f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 是奇函数． ⋯⋯1 分

以下讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的零点个数．

$f'(x)=\dfrac{-4x^2+2}{(1-x)(1+x)}$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ⋯⋯1 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 的情况如下：

x	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

因为 $f(0) = 0$，且 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上没有零点. ⋯⋯1 分

因为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$，且 $f(1 - \frac{1}{e^4}) < 0$，

由 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 上单调递减和函数零点存在定理知，

$f(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 内存在唯一零点.

综上，$f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内存在唯一零点. ⋯⋯1 分

因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内存在3个零点. ⋯⋯1 分

（Ⅲ）当 $0 \leqslant a \leqslant 2$ 时，$-ax^2 \leqslant 0$， $a - 2 \leqslant 0$，

故 $f'(x) = \dfrac{-ax^2 + a - 2}{(1 - x)(1 + x)} \leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减.

所以 $0 \leqslant a \leqslant 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分条件. ⋯⋯3 分

当 $a = -1$ 时，$f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{(1 - x)(1 + x)}$.

因为当 $x \in (-1, 1)$ 时，$x^2 - 3 < 0, (1 - x)(1 + x) > 0$，

故当 $x \in (-1, 1)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减.

所以 $0 \leqslant a \leqslant 2$ 不是 $f(x)$ 为单调函数的必要条件. ⋯⋯2 分

所以 $0 \leqslant a \leqslant 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）数列 $a_n = \sqrt{n}$ 是 D 数列.

理由如下：$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = 1$ 满足 D 数列定义. ⋯⋯2 分

数列 $a_n = 2^n$ 不是 D 数列.

理由如下：$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2^{n+1})^2 - (2^n)^2 = 2^{2n+2} - 2^{2n} = 3 \cdot 2^{2n}$ 不是常数. ⋯⋯2 分

（Ⅱ）以下证明：$d > 0$.

假设 $d < 0$，由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = d$ 知 $\{a_n^2\}$ 为等差数列，故 $a_n^2 = a_1^2 + (n-1)d$.

因为$\{a_n\}$是各项为正的无穷数列，

当n取大于$[\frac{-a_1^2}{d}]+1$的整数时，$a_n^2 \leqslant a_1^2+([\frac{-a_1^2}{d}]+2-1)d<0$，

与已知矛盾，所以假设不成立，所以$d>0$.

以下证明：$\{a_n\}$是递增数列.

因为$d>0$，$a_{n+1}^2=a_n^2+d>a_n^2$，且$\{a_n\}$是各项为正的无穷数列，

所以$a_{n+1}>a_n$. 所以$\{a_n\}$是递增数列.

以下证明：$\forall t>0$，$\exists k\in \mathbf{N}^*$，当$n\geqslant k$时，$a_n>t$.

若$t<a_1$，当$n>1$时，显然$a_n>t$.

若$t\geqslant a_1$，取$k=[\frac{t^2-a_1^2}{d}]+2$，

当$n\geqslant k$时，$a_n^2\geqslant a_1^2+([\frac{t^2-a_1^2}{d}]+2-1)d>t^2$，即$a_n>t$成立.

因为$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{d}{a_{n+1}+a_n}<\frac{d}{2a_n}$，

取$t=\frac{d}{2}$，当$n\geqslant k$时，$a_n>t$，此时，$b_n<\frac{d}{2\cdot\frac{d}{2}}=1$.

所以若$\{a_n\}$是D数列，则数列$\{b_n\}$中存在小于1的项. …5分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$\exists k\in \mathbf{N}$，当$n\geqslant k$时，$b_n<1$，即$a_{n+1}<a_n+1$，

以此类推，$0<a_{k+m}<a_{k+m-1}+1<a_{k+m-2}+2<\cdots<a_k+m$，$m\in\mathbf{N}^*$.

所以$\frac{1}{a_{k+m}}>\frac{1}{a_k+m}$，$m\in\mathbf{N}^*$. 设此时$2^{s-1}\leqslant a_k<2^s$，$s\in\mathbf{N}^*$，令$n=k+m$.

所以$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum_{i=k}^{k+m}\frac{1}{a_i}>\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_k+1}+\frac{1}{a_k+2}+\cdots+\frac{1}{a_k+m}$

$>\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+m}$.

因为$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^s-1)}>\frac{2^s}{2^s+2^s}=\frac{1}{2}$，

所以当$m=2^{s+2\times 2024}-1$，$m\in\mathbf{N}^*$，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum_{i=k}^{k+m}\frac{1}{a_i}>\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^{s+2\times 2024}-1)}$$

$$=(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^s-1)})+(\frac{1}{2^{s+1}}+\frac{1}{2^{s+1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{s+1}+(2^{s+1}-1)})+$$

$$\cdots+(\frac{1}{2^{s+2\times 2024}}+\frac{1}{2^{s+2\times 2024}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{s+2\times 2024}+(2^{s+2\times 2024}-1)})>\frac{2\times 2024}{2}=2024.$$

所以存在正整数n，使得$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}>2024$. ……6分