

恒成立与存在性专项靶题参考答案

1. 先求出 $a=1$ 可知 $f(x)=x+x\ln x$, 所以 $f(x)\leq kx^2$ 对任意 $x>0$ 恒成立

等价于 $k\geq \frac{1+\ln x}{x}$, 对任意 $x>0$ 恒成立

$$\text{令 } g(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$g'(x)=0, \text{ 即 } x=1$$

$0<x<1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增

$x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减

所以 $g(x)\leq g(1)=1$, 即 $k\geq 1$

2. 【答案】 $2\sqrt{2}-4$

【解析】由 $x^2-2y^2\leq cx(y-x)$ 整理有 $(1+c)x^2-2y^2\leq cxy$, 两边同时除以 xy 可得 $(1+c)\frac{x}{y}-2\frac{y}{x}\leq c$, 令 t

$$= \frac{x}{y} > 1, \text{ 即 } (1+c)t - \frac{2}{t} \leq c, \text{ 即 } t - \frac{2}{t} \leq (1-t)c, \text{ 则有 } c \leq \frac{t - \frac{2}{t}}{1-t} = \frac{t^2 - 2}{t - t^2}, \text{ 令 } f(t) = \frac{t^2 - 2}{t - t^2}, \text{ 则有 } f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 2}{(t - t^2)^2}, \text{ 令 } f'(t) = 0 \text{ 解得 } t = 2 + \sqrt{2} \text{ (} t = 2 - \sqrt{2} \text{ 不合条件 } t > 1, \text{ 舍去), 则极大值为 } f(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

-4 , 则有 $c \leq 2\sqrt{2} - 4$, 即 c 的最大值为 $2\sqrt{2} - 4$.

3. $f(x)<0$ 在 $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 内有解, $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x+2$,

$$\text{则 } f(x)_{\min} < 0, \text{ 所以 } f'(x) = 2ax - (a+2)x + \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - (a+2)x + 1}{x} = \frac{g'(x)}{x} (x>0),$$

分类讨论

① 当 $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$ 时, 即 $a \geq 2$ 时. 因为 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 函数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增,

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{a+2}{2} + \ln \frac{1}{2} + 2 < 0, \text{ 解得 } a > 4(1 - \ln 2), \text{ 所以 } a \geq 2;$$

② 当 $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1$, 即 $1 < a < 2$ 时, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right]$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right]$

上单调递减, 在 $x \in \left[\frac{1}{a}, 1\right]$ 时 $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{a+2}{2} + \ln \frac{1}{a} + 2 = -\frac{1}{a} + 1 + \ln \frac{1}{a}, \quad \text{令 } \frac{1}{a} = t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$h(t) = -t + 1 + \ln t, \left(\frac{1}{2} < t < 1\right), \quad h'(t) = -1 + \frac{1}{t} > 0$, 函数 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增, 所

$h(t) < h(1) = 0$ 恒成立, 所以 $1 < a < 2$;

③当 $\frac{1}{a} \geq 1$, 即 $0 < a \leq 1$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减,

$f(x)_{\min} = f(1) = 0, f(x)_{\min} < 0$, 不成立;

综上所述: $a > 1$.

4. 构造函数 $f(m) = (x^2 - 1)m - (2x - 1)$

问题等价于 $f(m) < 0$, 对于 $m \in [-2, 2]$, 一切实数 m 恒成立

$$\text{即 } \begin{cases} f(2) = 2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0 \\ f(-2) = -2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 < 0 \\ 2x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{7}}{2}, x < \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \quad \text{故 } x \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

5. 由 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 对任意 $x_1 \in [0, 2]$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$ 成立

故只需要 $f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\min}$

$f(x_1)$ 在 $x_1 \in [0, 2]$ 上单调递增, 故 $f(x_1) \geq f(0) = 0$

$g(x_2)$ 在 $x_2 \in [1, 2]$ 上单调递减, 故 $g(x_2) \geq g(2) = \frac{1}{4} - m$

所以只要 $\frac{1}{4} - m \leq 0$, 即 $m \geq \frac{1}{4}$.

6. (1) 当 $m=1, a<0$ 时, $f(x)=x-a\ln x-1, x\in(0,+\infty)$.

$\because f'(x)=\frac{x-a}{x}>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[3,4]$ 上为增函数.

设 $h(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{e^x}{ex}$, $\because h'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}>0$ 在 $[3,4]$ 恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $[3,4]$ 上为增函数.

设 $x_2>x_1$, 则 $|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\frac{1}{g(x_2)}-\frac{1}{g(x_1)}\right|$ 等价于 $f(x_2)-f(x_1)<h(x_2)-h(x_1)$,

即 $f(x_2)-h(x_2)<f(x_1)-h(x_1)$.

设 $u(x)=f(x)-h(x)=x-a\ln x-1-\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x}{x}$, 则 $u(x)$ 在 $[3,4]$ 为减函数.

$\therefore u'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{1}{e}\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}\leq 0$ 在 $(3, 4)$ 上恒成立.

$\therefore a\geq x-e^{x-1}+\frac{e^{x-1}}{x}$ 恒成立.

设 $v(x)=x-e^{x-1}+\frac{e^{x-1}}{x}$,

$\because v'(x)=1-e^{x-1}+\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}=1-e^{x-1}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$, $x\in[3, 4]$,

$\therefore e^{x-1}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>\frac{3}{4}e^2>1$, $\therefore v'(x)<0$, $v(x)$ 为减函数.

$\therefore v(x)$ 在 $[3, 4]$ 上的最大值为 $v(3)=3-\frac{2}{3}e^2$.

$\therefore a\geq 3-\frac{2}{3}e^2$, $\therefore a$ 的最小值为 $3-\frac{2}{3}e^2$.

7. 由 $f(x)=\ln x-x$ 得 $f'(x)=\frac{1-x}{x}<0$ 对任意 $x\in(1,2)$ 都成立, 所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调

递减, 所以 $f(x)\in(\ln 2-2, -1)$.

因为 $g'(x)=bx^2-b=b(x-1)(x+1)$,

当 $b<0$ 时, $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减, 所以 $g(x)\in(\frac{2}{3}b, -\frac{2}{3}b)$

根据题意, 得 $(\ln 2-2, -1)\subseteq(\frac{2}{3}b, -\frac{2}{3}b)$, 即 $\begin{cases} \frac{2}{3}b\leq \ln 2-2 \\ -\frac{2}{3}b\geq -1 \end{cases}$, 所以 $b\leq \frac{3}{2}\ln 2-3$.

当 $b > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \in (-\frac{2}{3}b, \frac{2}{3}b)$

根据题意, 得 $(\ln 2 - 2, -1) \subseteq (-\frac{2}{3}b, \frac{2}{3}b)$, 即 $\begin{cases} -\frac{2}{3}b \leq \ln 2 - 2 \\ \frac{2}{3}b \geq -1 \end{cases}$, 所以 $b \geq 3 - \frac{3}{2}\ln 2$.

综上, 实数 b 的取值范围是 $b \leq \frac{3}{2}\ln 2 - 3$ 或 $b \geq 3 - \frac{3}{2}\ln 2$

8.

【解析】设 $e^{4m-1} = \frac{1}{2} + \ln(2n) = k (k > 0)$, 则 $m = \frac{1}{4} + \frac{\ln k}{4}$, $n = \frac{1}{2}e^{k-\frac{1}{2}}$, 令

$h(k) = n - m = \frac{1}{2}e^{k-\frac{1}{2}} - \frac{\ln k}{4} - \frac{1}{4}$, $\therefore h'(k) = \frac{1}{2}e^{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4k}$, 又 $h'(k) = \frac{1}{2}e^{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4k}$ 是增函数,

$h'(\frac{1}{2}) = 0$, $\therefore h(k)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上递增, $\therefore h(k)_{\min} = h(\frac{1}{2}) = \frac{1+\ln 2}{4}$, 即 $n - m$ 的最小

值为 $\frac{1+\ln 2}{4}$, 故选 C.

9. 由题意知任意 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{e}, e]$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > x_1 x_2 (x_2 - x_1)$,

即 $\frac{f(x_1)}{x_1} + x_1 > \frac{f(x_2)}{x_2} + x_2$. 可构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} + x = \frac{\ln x}{x} - mx - 1 + x$,

则有任意 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{e}, e]$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $g(x_1) > g(x_2)$.

当 $x_1 > x_2$ 时, $g(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上单调递增, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - m + 1 \geq 0$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上恒成立,

即 $m \leq \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上恒成立.

令 $h(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1$, 则 $h'(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} < 0$,

所以 $h(x)$ 单调递减, $h(x)_{\min} = h(e) = 1$,

所以实数 m 的取值范围为 $m \leq 1$.

同理, 当 $x_1 < x_2$ 时, $g(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上单调递减, 可知实数 m 的取值范围为 $m \geq 2e^2 + 1$.

综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 1] \cup [2e^2 + 1, +\infty)$ 。

恒成立问题——数形结合法参考答案

1. 思路：本题难于进行参变分离，考虑数形结合解决，先作出 $y = (x-1)^2$ 的图像，观察图

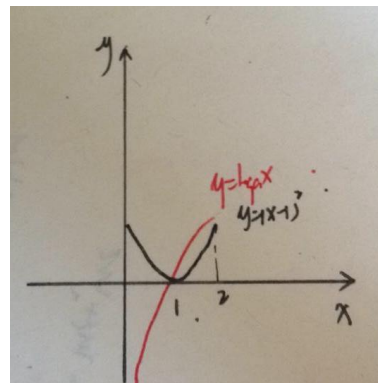
像可得：若要使不等式成立，则 $y = \log_a x$ 的图像应在

$y = (x-1)^2$ 的上方，所以应为单增的对数函数，即 $a > 1$ ，

另一方面，观察图像可得：若要保证在 $x \in (1, 2)$ 时不等式

成立，只需保证在 $x = 2$ 时， $(x-1)^2 < \log_a x$ 即可，代入

$x = 2$ 可得： $1 \leq \log_a 2 \Rightarrow a \leq 2$ ，综上可得： $1 < a \leq 2$



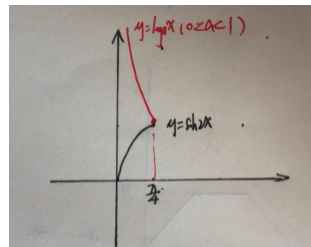
答案： $1 < a \leq 2$

2. 思路：本题选择数形结合，可先作出 $y = \sin 2x$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的图像， a 扮演的角色为对

数的底数，决定函数的增减，根据不等关系可得 $0 < a < 1$ ，观察图像进一步可得只需 $x = \frac{\pi}{4}$

时， $\log_a x \geq \sin 2x$ ，即 $\log_a \frac{\pi}{4} > \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow a > \frac{\pi}{4}$ ，所以

$$a \in \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$



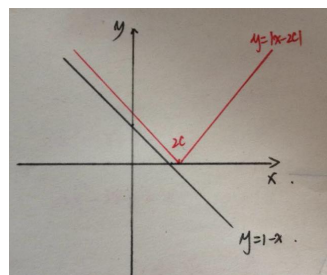
答案： $a \in \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

3. 思路：恒成立不等式变形为 $|x-2c| > 1-x$ ，即 $y = |x-2c|$ 的图像在 $y = 1-x$ 图像的上

方即可，先作出 $y = 1-x$ 的图像，对于 $y = |x-2c|$ ，可看作

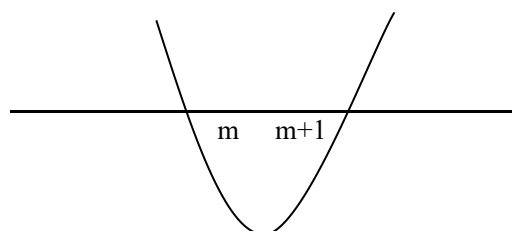
$y = |x|$ 经过平移得到，而平移的距离与 c 的取值有关。通过观

察图像，可得只需 $2c > 1$ ，解得： $c > \frac{1}{2}$



答案： $c > \frac{1}{2}$

4. 思路：恒成立的不等式为 $x^2 + mx - 1 < 0$ ，如果进行参变分离，虽可解决问题，但是因为 x 所在区间含参， m 的取值将决定分离时不等



号方向是否改变，需要进行分类讨论，较为麻烦。换一个角度观察到 $f(x)$ 是开口向上的抛物线，若要 $f(x) < 0$ ，只需端点处函数值小于零即可（无论对称轴是否在区间内），所以只

$$\text{需} \begin{cases} f(m) = 2m^2 - 1 < 0 \\ f(m+1) = 2m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases}, \text{解得 } m \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\text{答案: } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$