

导数与函数零点专项参考答案：

1. 令 $g(x)=0$ ，即 $ax^2+x-1-e^x=0$ 有且只有一个解，当 $x=0$ 时，显然 $ax^2+x-1-e^x=0$ 不成立，

$\therefore x \neq 0$ ， $a = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$ ，令 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$ ， $\therefore y = a$ 与 $h(x) = \frac{e^x - x + 1}{x^2}$ 有且只有一个交点，

$\because h'(x) = \frac{(e^x - 1)x^2 - 2x(e^x - x + 1)}{x^4} = \frac{(x-2)(e^x + 1)}{x^3}$ ，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调

递增；

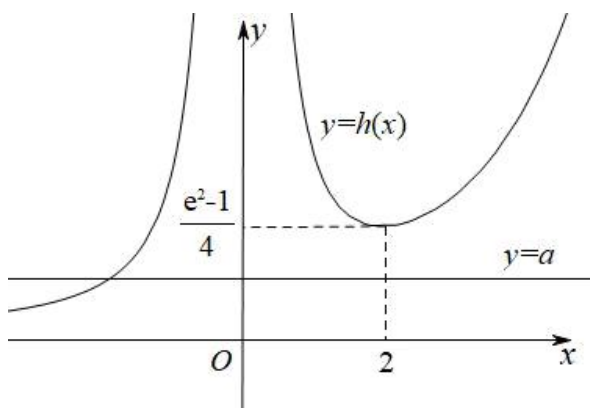
当 $x \in (0, 2)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减；

当 $x \in (2, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增，

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $h(x) \rightarrow 0$ ，当 $x \rightarrow 0$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$

当 $x=2$ 时， $h(2) = \frac{e^2 - 1}{4}$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$ ，

如图所示，



综上， a 的取值范围是 $(0, \frac{e^2 - 1}{4})$ 。

2.(1)

$f'(x) = x - \frac{a}{x} - a = \frac{1}{x}(x^2 - ax - a)$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x^2 - ax - a = 0$ 。

因为 $a > 0$ ，则 $\Delta = a^2 + 4a > 0$ ，即原方程有两根设为 x_1, x_2

$x > 0$ ，所以 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2} < 0$ (舍去)， $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$ 。

则当 $x \in \left(0, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}, +\infty\right)$ 时， $f'(x) > 0$

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right)$ 上是减函数，在 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}, +\infty\right)$ 上是增函数。

(2) 由 (1) 可知 $f(x)_{\min} = f(x_2)$ 。

$$\textcircled{1} \text{ 若 } f(x_2)=0, \text{ 则 } \begin{cases} f(x_2)=0, \\ f'(x_2)=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^2 - a\ln x_2 - ax_2 = 0, \\ x_2^2 - ax_2 - a = 0, \end{cases} \text{ 可得 } 1-2\ln x_2 - x_2 = 0,$$

设 $h(x)=1-2\ln x-x$, $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

所以 $h(x)=0$ 至多有一解且 $h(1)=0$, 则 $x_2=1$, 代入解得 $a=\frac{1}{2}$.

$$\textcircled{2} \text{ 若 } f(x_2)<0, \text{ 则 } \begin{cases} f(x_2)<0, \\ f'(x_2)=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^2 - a\ln x_2 - ax_2 < 0, \\ x_2^2 - ax_2 - a = 0, \end{cases} \text{ 可得 } 1-2\ln x_2 - x_2 < 0,$$

结合 $\textcircled{1}$ 可得 $x_2 > 1$, 因为 $\frac{1}{e} < 1 < x_2$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e^2} - a\ln\frac{1}{e} - a\frac{1}{e} = \frac{1}{2e^2} + a - \frac{a}{e} > 0$,

所以 $y=f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, x_2\right)$ 存在一个零点.

当 $x > 4a$ 时, $f(x) > 2ax - a\ln x - ax = a(x - \ln x) > 0$,

所以 $y=f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 存在一个零点. 因此 $y=f(x)$ 存在两个零点, 不合题意

综上所述: $a=\frac{1}{2}$.

$$3. f'(x) = ae^x - \frac{1}{x+1} = \frac{ae^x(x+1)-1}{x+1}, \text{ 令 } g(x) = ae^x(x+1)-1,$$

(1) 当 $-e^2 < a < 0$ 时, 则 $x \in (-\infty, -1)$, $g'(x) = ae^x(x+2)$, 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $g'(x) > 0$,

此时 $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-2, -1)$ 时, $g'(x) < 0$, 此时 $g(x)$ 单调递减; 故 $g(x) \leq g(-2) = -\frac{a}{e^2} - 1 < 0$,

则 $f'(x) = \frac{ae^x(x+1)-1}{x+1} > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增, 又 $x \rightarrow -1$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$

时, $f(x) \rightarrow -\infty$;

所以此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 只有一个零点;

(2) 当 $a > 0$ 时, 则 $x \in (-1, -\infty)$, $g'(x) = ae^x(x+2) > 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $(-1, -\infty)$ 单调递增,

且 $g(-1) = -1 < 0$, $g\left(\frac{1}{a}\right) = ae^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}+1\right)-1 = e^{\frac{1}{a}}(1+a)-1$, 又 $e^{\frac{1}{a}} > 1, 1+a > 1$, 则

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = ae^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}+1\right)-1 = e^{\frac{1}{a}}(1+a)-1 > 0,$$

故存在 $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{a}\right)$, 使得 $g(x_0)=0$,

当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 因为当 $x > -1$ 时, $\frac{1}{x+1} > 0$,

所以当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 由 $g(x_0) = 0$ 得 $ae^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 1}$, 则 $\ln a + x_0 = \ln \frac{1}{x_0 + 1}$,

$$f(x_0) = ae^{x_0} - \ln(x_0 + 1) - \ln a - 1 = \frac{1}{x_0 + 1} + x_0 - 1 = \frac{x_0^2 - 1}{x_0 + 1} \geq 0$$

当 $x_0 = 0$ 时, 等号成立,

由 $f(0) = 0$, 可得 $f(0) = ae^0 - 1 - \ln a = a - 1 - \ln a = 0$, 解得 $a = 1$,

综合第一问可知, 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点;

综上, 若 $f(x)$ 只有一个零点, 则 a 的取值范围是 $(-\mathrm{e}^2, 0) \cup \{1\}$

4.

由题意知, $g(x) = \mathrm{e}^x \cdot f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left[a(\mathrm{e}^x + 1) - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - 2 \right] = ae^x (\mathrm{e}^x + 1) - 2\mathrm{e}^x - x$,

$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g'(x) = ae^x(\mathrm{e}^x + 1) + ae^x \cdot \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 1 = (2\mathrm{e}^x + 1)(ae^x - 1)$.

若 $a \leq 0$, 则 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

若 $a > 0$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $\mathrm{e}^x > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个零点, 即 $g(x) = \mathrm{e}^x \cdot f(x)$ 有两个零点.

若 $a \leq 0$, 由 (1) 知, $g(x)$ 至多有一个零点.

若 $a > 0$, 由 (1) 知, 当 $x = -\ln a$ 时, $g(x)$ 取得最小值, 最小值为 $g(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$.

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $g(-\ln a) = 0$, 故 $g(x)$ 只有一个零点:

② 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由于 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $g(-\ln a) > 0$, 故 $g(x)$ 没有零点;

③ 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $g(-\ln a) < 0$.

又 $g(-2) = ae^{-2}(\mathrm{e}^{-2} + 1) - 2\mathrm{e}^{-2} + 2 > -2\mathrm{e}^{-2} + 2 > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上有一个零点.

存在 $x_0 \in \left(\ln \left(\frac{3}{a} - 1 \right), +\infty \right)$, 则

$$g(x_0) = ae^{x_0}(\mathrm{e}^{x_0} + 1) - 2\mathrm{e}^{x_0} - x_0 = \mathrm{e}^{x_0}(ae^{x_0} + a - 2) - x_0 > \mathrm{e}^{x_0} - x_0 > 0.$$

又 $\ln \left(\frac{3}{a} - 1 \right) > -\ln a$, 因此 $g(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上有一个零点.

综上，实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$ 。

5. 注意到 $f(0)=0$ ，设 $g(x)=\frac{e^x(x-3)+2x+3}{x^2}$ ，则 $g(x)=-a$ 在 $x \neq 0$ 时有两不同解，

$$g'(x)=\frac{e^x(x^2-4x+6)-2x-6}{x^3}, \text{ 令 } h(x)=e^x(x^2-4x+6)-2x-6, h(0)=0$$

$$h'(x)=e^x(x^2-2x+2)-2, h'(0)=0, \text{ 令 } p(x)=h'(x), \text{ 则有 } p'(x)=e^x x^2 \geq 0,$$

$\therefore h'(x)$ 是增函数，则 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $x \in (0, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

所以 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $h(x)$ 单调递减， $x \in (0, +\infty)$ 时， $h(x)$ 单调递增， $h(x) \geq h(0)=0$ ，

所以 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $x \in (0, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 时，单调递减， $x \in (0, +\infty)$ 时，单调递增，

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-2)+2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

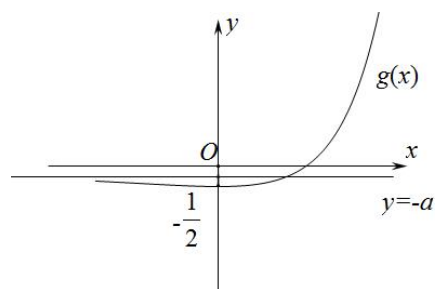
当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $0 < e^x < 1$ ， $x-3+2x+3 < e^x(x-3)+2x+3 < 2x+3$ ，

$$\text{即 } \frac{2x+3}{x^2} > g(x) > \frac{3}{x}, \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } \frac{2x+3}{x^2} < 0, \frac{3}{x} < 0,$$

$$\text{并且 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0, \therefore g(x) < 0, \text{ 并且 } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ，

函数图像如下：



所以 $-\frac{1}{2} < -a < 0$ 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ ；

综上，函数 $f(x)$ 得单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(0, 2)$ ， $0 < a < \frac{1}{2}$ 。