

导数在函数单调性及最值方面运用专题参考答案:

类型一 单调区间

1. 【解析】 因为函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$,

当 $f'(x)<0$ 时, 解得 $0<x<\frac{1}{e}$, 即函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

2. 【解析】 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$. 令 $f'(x)=x\cos x>0$,

则其在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的解集为 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 即 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

类型二 求含参数函数单调区间及最值

1. 【解析】 $f'(x)=2x-(a+2)+\frac{a}{x}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}, x>0$.

当 $a\leq 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数, 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数;

当 $0<a<2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,\frac{a}{2})$ 上为增函数, 在 $[\frac{a}{2},1]$ 上为减函数, 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数;

当 $a=2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数;

当 $a>2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数, 在 $[1,\frac{a}{2}]$ 上为减函数, 在 $(\frac{a}{2},+\infty)$ 上为增函数.

2. 【解析】 根据题意可得, 当 $a=0$ 时, $f(x)=x^2-1, f'(x)=2x$,

函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

当 $a\neq 0$ 时, $f'(x)=2xe^{-ax}+x^2(-a)e^{-ax}=e^{-ax}(-ax^2+2x)$.

因为 $e^{-ax}>0$, 所以令 $g(x)=-ax^2+2x=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{a}$.

①当 $a>0$ 时, 函数 $g(x)=-ax^2+2x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $\left[\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上有 $g(x)<0$, 即 $f'(x)<0$, 函数 $y=f(x)$ 单调递减; 函数 $g(x)=-ax^2+2x$ 在 $\left[0, \frac{2}{a}\right]$ 上有 $g(x)\geq 0$, 即 $f'(x)\geq 0$, 函数 $y=f(x)$ 单调递增.

②当 $a<0$ 时, 函数 $g(x)=-ax^2+2x$ 在 $\left[-\infty, \frac{2}{a}\right]$ 和 $(0, +\infty)$ 上有 $g(x)>0$, 即 $f'(x)>0$, 函数 $y=f(x)$ 单调递增; 函数 $g(x)=-ax^2+2x$ 在 $\left[\frac{2}{a}, 0\right]$ 上有 $g(x)\leq 0$, 即 $f'(x)\leq 0$, 函数 $y=f(x)$ 单调递减.

减.

综上所述, 当 $a=0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$;

当 $a>0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, 0)$, $\left[\frac{2}{a}, +\infty\right)$, 单调增区间为 $\left[0, \frac{2}{a}\right]$;

当 $a<0$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\infty, \frac{2}{a}\right]$, $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $\left[\frac{2}{a}, 0\right]$.

3. 【解析】(1) 由题意得: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{1}{x} - 2ax + 1 = \frac{-2ax^2 + x - 1}{x} (x > 0)$

令 $g(x) = -2ax^2 + x - 1 (a > 0)$, $\Delta = 1 - 8a$

①当 $\Delta = 1 - 8a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{8}$ 时, $g(x) \leq 0$ 恒成立即: $f'(x) \leq 0 \therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

②当 $\Delta = 1 - 8a > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{8}$ 时令 $g(x) = 0$, 解得: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{-4a} = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}$,

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}$$

当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}, +\infty\right)$ 上单调递减; 在 $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{4a}\right)$ 上单调递增

4. 【解析】 $f'(x) = \frac{-x - (1-x)}{x^2} + \frac{k}{x} = \frac{kx - 1}{x^2}$.

①若 $k=0$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上恒有 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递减.

②若 $k \neq 0$, 则 $f'(x) = \frac{kx - 1}{x^2} = k \frac{x - \frac{1}{k}}{x^2}$.

(i) 若 $k < 0$, 则在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上恒有 $k \frac{x - \frac{1}{k}}{x^2} < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上单调递减,

(ii) 若 $k > 0$, 由 $k < \frac{1}{e}$, 得 $\frac{1}{k} > e$, 则 $x - \frac{1}{k} < 0$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上恒成立, 所以 $k \frac{x - \frac{1}{k}}{x^2} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

上单调递减.

综上, 当 $k < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\min} = f(e) = \frac{1}{e} + k - 1$, $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{e}) = e - k - 1$.

类型三: 已知单调性求参数取值范围

1. $f(x)$ 的递增区间为 $[1, +\infty)$, 即 $f(x)$ 仅在 $[1, +\infty)$ 单调递增。

令 $f'(x) > 0 \Rightarrow ax^2 + a - 2 > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{2-a}{a}$, 若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, +\infty)$

不符题意, 若 $0 < a \leq 1$, 则 $x > \sqrt{\frac{2-a}{a}}$ 时, $f'(x) > 0$ 。所以 $\sqrt{\frac{2-a}{a}} = 1 \Rightarrow a = 1$

2. $f'(x) = \frac{a}{ax+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2}{(ax+1)(x+1)^2}$, 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增可得:

$$\forall x \geq 1, f'(x) = \frac{ax^2 + a - 2}{(ax+1)(x+1)^2} \geq 0 \Rightarrow a(x^2 + 1) \geq 2. \therefore a \geq \left(\frac{2}{x^2 + 1}\right)_{\max} = 1$$

$$\therefore a \geq 1$$

3. $f'(x) = -x^2 + x + 2a$, 有已知条件可得: $\exists x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, 使得 $f'(x) \geq 0$, 即

$$a \geq \frac{1}{2}(x^2 - x), \text{ 只需 } a \geq \left[\frac{1}{2}(x^2 - x)\right]_{\min}, \text{ 而 } y = \frac{1}{2}(x^2 - x) > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\right] = -\frac{1}{9}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } a > -\frac{1}{9}$$

$$\text{答案: } a > -\frac{1}{9}$$

类型四: 导数在单调性方面综合运用参考答案

1. 【解析】设函数 $y = f(x)$ 的图象上任意不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 不妨设 $x_1 > x_2$,

$$\text{则 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 2, \text{ 即 } \frac{-x_1^3 + ax_1^2 + x_2^3 - ax_2^2}{x_1 - x_2} < 2$$

$$\text{转化为 } \frac{(-x_1^3 + ax_1^2 - 2x_1) - (x_2^3 - ax_2^2 - 2x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

引入函数 $g(x) = -x^3 + ax^2 - 2x$, 则 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上是减函数, 由 $g(x)$ 在任意区间上都不是常函数,

故 $g'(x) = -3x^2 + 2ax - 2 \leq 0$ 恒成立, 即 $\Delta = (2a)^2 - 24 \leq 0$, 从而得到 $-\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$

2. 【解析】

解法 1 因为 $f(x) = x^3 + ax + b$ ，所以 $f'(x) = 3x^2 + a$ ，

又因为 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，所以 $a < f'(x) < 1 + a$ ，

因为 $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ ，所以 $-1 < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 1$

所以 $\begin{cases} a \geq -1 \\ a + 1 \leq 1 \end{cases}$ ，即 $-1 \leq a \leq 0$ ，所以实数 a 的取值范围为 $-1 \leq a \leq 0$

解法 2 不妨设 $x_1 < x_2$ ， $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ 等价于 $\begin{cases} f(x_2) - x_2 < f(x_1) - x_1 \\ f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \end{cases}$

令 $g(x) = f(x) - x$ ， $h(x) = f(x) + x$ ，

则等价于 $g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减， $h(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增，

转化为 $g'(x) = 3x^2 + a - 1 \leq 0$ 在 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上恒成立； $h'(x) = 3x^2 + a + 1 \geq 0$ 在 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上

恒成立；

所以 $\begin{cases} g'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq 0 \\ h'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $-1 \leq a \leq 0$ ，所以实数 a 的取值范围为 $-1 \leq a \leq 0$