

极值点偏移专题参考答案

1. 证明：当 $k \leq 0$ 时，由 (1) 知函数 $f(x)$ 单调递增，不存在两个零点。

所以 $k > 0$ 。

设函数 $f(x)$ 的两个零点为 x_1, x_2 ，且 $x_1 > x_2$ ，

则 $e^{kx_1} = k(x_1 + 2), e^{kx_2} = k(x_2 + 2), \therefore x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0, \therefore x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2}$ ，

设 $\frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = t$ ，则 $t > 1$ ，且 $\begin{cases} \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = t \\ x_1 - x_2 = \ln \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} \end{cases}$ ，

解得 $x_1 + 2 = \frac{t \ln t}{t - 1}, x_2 + 2 = \frac{\ln t}{t - 1}$ ，

所以 $x_1 + x_2 + 4 = \frac{(t + 1) \ln t}{t - 1}$ ，

要证 $x_1 + x_2 > -2$ ，

只需证 $\frac{(t + 1) \ln t}{t - 1} > 2$ ，即证 $(t + 1) \ln t - 2(t - 1) > 0$ ，

设 $g(t) = (t + 1) \ln t - 2(t - 1), \therefore g'(t) = \ln t + \frac{1}{t}(t + 1) - 2 = \ln t + \frac{1}{t} - 1$ ，

设 $h(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1, \therefore h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} > 0, h(t)$ 单调递增，

所以 $g'(t) > g'(1) = 0$ ，

所以 $g(t)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(t) > g(1) = 0, \therefore \frac{(t + 1) \ln t}{t - 1} > 2$ ，

故 $x_1 + x_2 > -2$ 。

2. \because 函数 $f(x) = \ln x - ax$ 有两个零点 x_1, x_2 , 即 $\ln x_1 = ax_1, \ln x_2 = ax_2$,

$$\therefore \text{即 } \ln x_1 + \ln x_2 = a(x_1 + x_2), \quad \frac{\ln x_2}{\ln x_1} = \frac{x_2}{x_1},$$

设 $u = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 则 $\begin{cases} \ln x_2 - \ln x_1 = \ln u \\ \ln x_2 = u \ln x_1 \end{cases}$, 得

$$\ln x_1 + \ln x_2 = \frac{u+1}{u-1} \ln u \text{ ----- (6 分)}$$

$$\text{令 } h(u) = \frac{u+1}{u-1} \ln u (u > 1), \text{ 则 } h'(u) = \frac{u - \frac{1}{u} - 2 \ln u}{(u-1)^2}, \text{ ----- (7 分)}$$

$$\text{设 } m(u) = u - \frac{1}{u} - 2 \ln u, \quad m'(u) = (1 - \frac{1}{u})^2 > 0,$$

$\therefore m(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 即 $m(u) > m(1) = 0$,

从而 $h'(u) > 0$, 即 $h(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, ----- (9 分)

$$\lim_{u \rightarrow 1} h(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u+1) \ln u - (1+1) \ln 1}{u-1} = [(u+1) \ln u]' \big|_{u=1} = (\frac{u+1}{u} + \ln u) \big|_{u=1} = 2 \text{ ----- (11 分)}$$

综上 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 即 $x_1 x_2 > e^2$ -----

3. 首先判断 $f(1)=0$

(II) 容易知道函数 $f(x)$ 在 $A(1,0)$ 处的切线斜率为 $f'(1) = 1 - a = a^2 - a - 3$, 得 $a = \pm 2$,

由 (I) 可知 $a = -2$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上递增.

不妨设 $x_1 < x_2$, 因为 $|f(x_1)| = |f(x_2)|$, 则 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$,

则有 $-(x_1 + 2 \ln x_1 - 1) = x_2 + 2 \ln x_2 - 1$, 整理得 $x_2 + x_1 = 2 - 2 \ln(x_1 x_2)$,

由基本不等式得 $x_2 + x_1 > 2\sqrt{x_1 x_2}$, 故 $2 - 2 \ln(x_1 x_2) > 2\sqrt{x_1 x_2}$, 整理得 $\sqrt{x_1 x_2} + \ln(x_1 x_2) - 1 < 0$, 即

$$f(\sqrt{x_1 x_2}) < f(1).$$

由函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\sqrt{x_1 x_2} < 1$, 即 $x_1 x_2 < 1$.

4. $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = c$ 得两个不等实数根, 首先判断 $a > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$. 则 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = c$, $x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2 = c$.

两式相减得 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 - x_2^2 + (a-2)x_2 + a \ln x_2 = 0$,

$$\text{化为 } a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}.$$

先判断 $f'(\frac{a}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故只要证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可,

$$\text{即证明 } x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}, \text{ 即证明 } \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2},$$

$$\text{设 } t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 令 } g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}, \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$$

$$\because 1 > t > 0, \therefore g'(t) > 0$$

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数, 又在 $t=1$ 处连续且 $g(1) = 0$,

\therefore 当 $t \in (0, 1)$ 时, $g(t) < 0$ 总成立. 故命题得证.

5. 【解析】令 $g(x) = f'(x) = 2x - 2 + ae^x$, 则 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点.

$$\text{令 } g(x) = 0, \text{ 得 } a = -\frac{2(x-1)}{e^x},$$

$$\text{令 } h(x) = -\frac{2(x-1)}{e^x}, \text{ 则 } h(x_1) = h(x_2),$$

$$h'(x) = \frac{2x-4}{e^x}, \text{ 可得 } h(x) \text{ 在区间 } (-\infty, 2) \text{ 单调递减, 在区间 } (2, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

所以 $x_1 < 2 < x_2$,

$$\text{令 } H(x) = h(2+x) - h(2-x)$$

$$\text{则 } H'(x) = h'(2+x) - h'(2-x) = \frac{2x(e^{2-x} - e^{2+x})}{e^{2+x} \cdot e^{2-x}},$$

当 $0 < x < 2$ 时, $H'(x) < 0$, $H(x)$ 单调递减, 有 $H(x) < H(0) = 0$,

所以 $h(2+x) < h(2-x)$,

$$\text{所以 } h(x_1) = h(x_2) = h[2 + (x_2 - 2)] < h[2 - (x_2 - 2)] = h(4 - x_2),$$

因为 $x_1 < 2$, $4 - x_2 < 2$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减

所以 $x_1 > 4 - x_2$, 即 $x_1 + x_2 > 4$.

6. (1) 证明: 令 $g(x) = f(x) - f(2-x)$

则 $g(x) = xe^{-x} - (2-x)e^{x-2}$

$\therefore g'(x) = (x-1)(e^{2x-2} - 1)e^{-x}$

\because 当 $0 < x < 1$ 时, $2x-2 < 0$, 从而 $e^{2x-2} - 1 < 0$ 又 $e^{-x} > 0$

所以 $g'(x) > 0$, 从而函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 是增函数. $\because e^{-x} > 0$, $\therefore g'(x) > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数

又 $\because g(1) = 0$. $\therefore 0 < x < 1$ 时, $g(x) < g(1) = 0$

即当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(2-x)$

(2) 证明: $\because 0 < x_1 < 1$

$\therefore 2 - x_1 > 1$

由(1)得: $f(x_1) < f(2-x_1)$

$\because f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore f(x_2) < f(2-x_1)$

$\because f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内是减函数

$\therefore x_2 > 2 - x_1$

即 $x_1 + x_2 > 2$