

## 导数构造新函数专题参考答案

### 1. 【答案】C

【解析】 $\because f(x) - 3x^2 + f(-x) - 3x^2 = 0$ ，设  $g(x) = f(x) - 3x^2$ ，则  $g(x) + g(-x) = 0$ ， $\therefore g(x)$  为奇函数，又  $g'(x) = f'(x) - 6x < -\frac{1}{2}$ ， $\therefore g(x)$  在  $x \in (-\infty, 0)$  上是减函数，从而在  $R$  上是减函数，又  $f(m+2) \leq f(-2m) + 12m + 12 - 9m^2$ ，等价于  $f(m+2) - 3(m+2)^2 \leq f(-2m) - 3(-2m)^2$ ，即  $g(m+2) \leq g(-2m)$ ， $\therefore m+2 \geq -2m$ ，解得  $m \geq -\frac{2}{3}$ ，故选 C.

2. 【解答】解：根据题意，设  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，

若  $f(2-x) = f(x)e^{2-2x}$ ，变形可得  $\frac{f(2-x)}{e^{2-x}} = \frac{f(x)}{e^x}$ ，即  $g(2-x) = g(x)$ ，则函数  $g(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称，

则导数  $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

当  $x \neq 1$  时， $(x-1)[f'(x) - f(x)] > 0$ ，则  $x > 1$  时，有  $f'(x) - f(x) > 0$ ，即  $g'(x) > 0$ ，即函数  $g(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  为增函数，

对于 A，不能比较  $g(0)$  与  $g(1)$  的大小，故无法比较  $f(1)$  和  $f(0)$  的大小，A 错误；

对于 B，函数  $g(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称， $g(0) = g(2)$ ，即  $\frac{f(0)}{e^0} = \frac{f(2)}{e^2}$ ，则有  $f(2) = e^2 f(0)$ ，无法判断  $f(2) > e f(0)$ ，B 错误；

对于 C，有  $g(3) > g(2) = g(0)$ ，即  $\frac{f(3)}{e^3} > \frac{f(0)}{e^0}$ ，变形可得  $f(3) > e^3 f(0)$ ，C 正确；

对于 D，同理可得： $f(4) > e^4 f(0)$ ，D 错误；

故选：C.

3 【解答】解：设  $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则  $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ，

即函数  $F(x)$  在  $R$  上单调递减，

因为  $f'(x) = f'(4-x)$ ，

即导函数  $y = f'(x)$  关于直线  $x=2$  对称，

所以函数  $y = f(x)$  是中心对称图形，且对称中心  $(2, 1)$ ，

由于  $f(4) = 0$ ，即函数  $y = f(x)$  过点  $(4, 0)$ ，

其关于点  $(2,1)$  的对称点  $(0,2)$  也在函数  $y=f(x)$  上,

所以有  $f(0)=2$ ,

$$\text{所以 } F(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 2,$$

而不等式  $f(x)-2e^x < 0$  即  $\frac{f(x)}{e^x} < 2$ ,

即  $F(x) < F(0)$ ,

所以  $x > 0$ ,

故使得不等式  $f(x)-2e^x < 0$  成立的  $x$  的取值范围是  $(0, +\infty)$ .

故选: B.

4 【解答】解: 可构造函数  $F(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ ,

$$F'(x) = \frac{f(x)e^{2x} - 2f(x)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}},$$

由  $f'(x) > 2f(x)$ , 可得  $F'(x) > 0$ , 即有  $F(x)$  在  $R$  上递增.

不等式  $f(\ln x) < x^2$  即为  $\frac{f(\ln x)}{x^2} < 1$ , ( $x > 0$ ), 即  $\frac{f(\ln x)}{e^{2\ln x}} < 1$ ,  $x > 0$ .

$$\text{即有 } F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{e} = 1, \text{ 即为 } F(\ln x) < F\left(\frac{1}{2}\right),$$

由  $F(x)$  在  $R$  上递增, 可得  $\ln x < \frac{1}{2}$ , 解得  $0 < x < \sqrt{e}$ .

故不等式的解集为  $(0, \sqrt{e})$ ,

故选: B.

5. 【答案】A

【解析】构造函数  $g(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{2}x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x) - \frac{1}{2}f(x)}{e^{\frac{1}{2}x}} > 0$ , 所以函数

$g(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{2}x}}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 所以  $g(1) < g(2)$ , 即  $\frac{f(1)}{e^{\frac{1}{2}}} < \frac{f(2)}{e}$ , 则  $\frac{f(1)}{f(2)} < e^{-\frac{1}{2}}$ ;

令  $h(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{3}x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , 则  $h'(x) = \frac{f'(x) - \frac{1}{3}f(x)}{e^{\frac{1}{3}x}} < 0$ , 函数  $h(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{3}x}}$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数.

所以  $h(1) > h(2)$ , 即  $\frac{f(1)}{e^{\frac{1}{3}}} > \frac{f(2)}{e^{\frac{2}{3}}}$ , 则  $\frac{f(1)}{f(2)} > \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}$ . 综上,  $\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} < \frac{f(1)}{f(2)} < e^{-\frac{1}{2}}$ , 故答案为 A.

6 【解答】解：∵函数  $f(x)$  满足  $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}$ ,

$$\therefore [x^2 f(x)]' = \frac{e^x}{x}$$

$$\text{令 } F(x) = x^2 f(x), \text{ 则 } F'(x) = \frac{e^x}{x},$$

$$F(2) = 4 \cdot f(2) = \frac{e^2}{2}.$$

$$\text{由 } x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}, \text{ 得 } f'(x) = \frac{e^x - 2F(x)}{x^3},$$

$$\text{令 } \varphi(x) = e^x - 2F(x), \text{ 则 } \varphi'(x) = e^x - 2F'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x}.$$

∴  $\varphi(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减, 在  $(2, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore \varphi(x) \text{ 的最小值为 } \varphi(2) = e^2 - 2F(2) = 0.$$

$$\therefore \varphi(x) \geq 0.$$

$$\text{又 } x > 0, \therefore f'(x) \geq 0.$$

∴  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增.

∴  $f(x)$  既无极大值也无极小值.

故选: D.

7. 【解答】解: ∵  $xf'(x) + f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,

$$\therefore (xf(x))' = \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{两边积分 } xf(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C,$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} \ln^2 x + C \right),$$

$$\therefore f(e) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore f(e) = \frac{1}{e} \left( \frac{1}{2} + C \right) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{令 } y = f(x) - x, \text{ 则 } y' = \frac{-(\ln x + 1)^2}{2x^2} - 1 < 0,$$

∴ 函数在定义域内单调递减,

$$\therefore f(x+1) - f(e+1) > x - e,$$

$$\therefore f(x+1)-(x+1) > f(e+1)-(e+1) ,$$

$$\therefore 0 < x+1 < e+1 ,$$

$$\therefore -1 < x < e ,$$

故选：  $C$  .