

## 二次求导与隐零点专项靶题

### 二次求导成功典例

1. 已知函数  $f(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ . 证明:  $(x-1)f(x) \geq 0$ .
2. 设函数  $f(x) = 1 - e^{-x}$ . 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ , 求  $a$  的取值范围.
- 3 设  $a$  为实数. 求证: 当  $a > \ln 2 - 1$  且  $x > 0$  时,  $e^x > x^2 - 2ax + 1$ .
4. 已知  $f(x) = e^x + 2x^2 - 3x$ , 当  $x \geq \frac{1}{2}$  时,  $f(x) \geq \frac{5}{2}x^2 + (a-3)x + 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

### 二次求导不成功典例（隐零点）

1. 设函数  $f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{x} (x > 0)$ , 若  $f(x) > \frac{k}{x+1}$  恒成立, 求正整数  $k$  的最大值.
2. 设函数  $f(x) = \ln(x-1) + ax^2 + x + 1, g(x) = (x-1)e^x + ax^2, a \in R$ , 证明  $f(x) \leq g(x)$ .
3. 已知函数  $f(x) = \ln x + a(x-1)^2 (a > 0)$ . 若  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有唯一的零点  $x_0$ , 证明:  $e^{-\frac{3}{2}} < x_0 < e^{-1}$ .
- 4 设  $f(x) = ax + \ln x + 1$ , 若对任意的  $x > 0, f(x) \leq xe^{2x}$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.
5. 已知函数  $f(x) = 2e^x - (x+a)^2$ , 若当  $x \geq 0$  时, 不等式  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.