

一般数列求和专项靶题：

分组求和

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 3$ ，公差 $d \neq 0$ ；等比数列 $\{b_n\}$ 中， $b_3 = a_1$ ， b_1 是 a_2 和 a_3 的等差中项， b_2 是 a_1 和 a_2 的等差中项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

2. 已知公比为 3 的等比数列 $\{a_n\}$ 与首项为 1 的等差数列 $\{b_n\}$ ，满足 $a_2 = b_5$ ， $a_3 = b_{14}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $c_n = a_n + (-1)^n b_n$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_{2n} 。

倒序相加

1. 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，若 $0 < a < 1$ ，试求：

(1) $f(a) + f(1-a) =$ _____；

(2) $f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{3}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right) =$ _____。

2. 设函数 $f(x) = \frac{2}{2^x + 1}$ ，利用课本中推导等差数列前 n 项和的方法，求得

$f(-5) + f(-4) + \cdots + f(0) + \cdots + f(4) + f(5)$ 的值为_____。

3. 已知 $f(x) = x^3 - 3x^2$ ，则 $f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{4046}{2023}\right) =$ ()

A. -8088

B. -8090

C. -8092

D. -8094

4. 已知函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 为奇函数，且 $g(x) = f(x) + 1$ ，若 $a_n = g\left(\frac{n}{2023}\right)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项和为_____。

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，其公比 $q \neq -1$ ， $\frac{a_4 + a_5}{a_7 + a_8} = \frac{1}{27}$ ，且 $S_4 = a_3 + 93$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知 $b_n = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

6. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 0 的等差数列，且 a_1, a_2, a_6 成等比数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = (-1)^n a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

裂项相消法

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列， $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_2 + b_2 = 4$ ， $S_3 = 6$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 4$ ， $2a_4 - a_5 = 7$ ，公比不为 -1 的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = 4$ ，

$$b_4 + b_5 = 8(b_1 + b_2).$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{3}{a_n \cdot a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} a_n$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n + a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 。

4. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求 a_1 的值；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 证明：对一切正整数 n ，有

$$\frac{1}{a_1 \sqrt{a_1 + 2}} + \frac{1}{a_2 \sqrt{a_2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{a_n \sqrt{a_n + 2}} \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

5. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于 0，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。

6 记 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $2S_n = (3^n - 1)a_n$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{(1-a_n)S_{n+1}}$ ，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $T_n \geq \frac{3}{8}$ 。

错位相减法

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 = 3, S_5 = 20$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足关系式

$$T_n = 1 - b_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 R_n 。

2. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。