

抽象函数专项：

1. (多选题) 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ，当 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减

B. 复合函数 $f(\sin x)$ 为偶函数

C. 复合函数 $f(\cos x)$ 为偶函数

D. 当 $x \in [0, 2\pi]$ ，不等式 $f(\sin x) + f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

2. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$ ，则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(k) = kf(1), k \in \mathbf{Z}$

C. $f(x) = kf\left(\frac{x}{k}\right), (k \neq 0)$

D. $f(-x)f(x) < 0$

3. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(1) = 0$ ，若 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $f(-1) = -4$

B. $f(x)$ 有最大值

C. $f(2024) = 4046$

D. 函数 $f(x) + 2$ 是奇函数

4. (多选题) (2024·安徽安庆·二模) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，满足对任意的实数 x, y ，均有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) < 1$ ，则 ()

A. $f(0) = 1$

B. $f(1) + f(-1) = 1$

C. 函数 $f(x)$ 为减函数

D. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称

5. (多选题) 已知定义在实数集 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ ， $f(1) = 0, f'(1) = \frac{1}{2}$ ，则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 成中心对称

C. $f(2024) = 1012 \times 2023$

D. $\sum_{k=1}^{2024} f'(k) = 1012 \times 2024$

6 (多选题) 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy + 1$ ，且 $f(1) = 1$ ，则 ()

A. $f(0) = -1$

B. $f(x)$ 可能是偶函数

C. $f(2) = 8$

D. $f(x)$ 可能是奇函数

7. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+y)+2xy=f(x)+f(y)$, $f(1)=2$, 则 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(-2)=-10$

C. $y=f(x)+x^2$ 是奇函数

D. $y=f(x)-x^2$ 是偶函数

8. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的可导函数, 若

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$, 且 $f'(0)=-3$, 则 ()

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 是减函数

C. $f(\sqrt{3})=0$

D. $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

9. (多选题) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$, $f'(x)$ 为

$f(x)$ 的导函数, 且 $f'(1)=2$, 则 ()

A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的切线斜率为 7

C. $f(3)=12$ D. 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

10. (多选题) 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(x)-f(y)=f(x-y)$

C. $f(x)$ 为奇函数

D. $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上有最大值 $f(n)$

11. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 4k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 且 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,

$f(1)=1$, 则 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x)$ 为周期函数, 且 2 为 $f(x)$ 的周期 D. $f(2023)=-1$

12. 已知定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，且对任意的 $x, y \in (-1, 1)$ ，均有 $f(x+y)[1-f(x)f(y)] = f(x)+f(y)$ 。若 $f(\ln x) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ ，则 x 的取值范围是（ e 是自然对数的底数）（ ）

A. $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$

B. $\left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$

C. (\sqrt{e}, e)

D. $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cup (\sqrt{e}, e)$

13. （多选题）已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ，且 $f(1)=\frac{1}{2}$ ，则（ ）

A. $f(0)=1$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(3n)=-1, n \in \mathbf{N}^*$

D. $\sum_{n=1}^{2024} f(n)=0, n \in \mathbf{N}^*$

14. （多选题）已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 都满足 $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ，且 $f(1)=-1$ ，以下结论正确的有（ ）

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

B. $f(x+2)$ 是偶函数

C. $f(x+1)$ 是奇函数

D. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2025)=-1$

15. （多选题）已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，满足 $2f(x+y)f(x-y)=f(2x)+f(2y)$ ，且 $f(1)=-1$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $f(0)=1$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(2x)=f(x)$

D. 2 是函数 $f(x)$ 的一个周期

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，则（ ）

A. $f(0)=1$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 是增函数

D. $f(x)$ 是周期函数

17. (多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且

$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$, $f(1)=\sqrt{3}$, $f\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ 为偶函数, 则 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(3+x)=-f(3-x)$

D. $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=\sqrt{3}$

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, 若 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot\cos y$,

则函数 $f(x)$ ()

A. 以 π 为周期

B. 最大值是 1

C. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减

D. 既不是奇函数也不是偶函数

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ 是偶函数, $f(x-1)$ 是奇函数, 则 ()

A. $f(0)=0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(1)=0$

D. $f(3)=0$

20. 已知函数 $f(2x+1)$ 是奇函数, $f(x+2)$ 是偶函数, 当 $x\in[2,3]$ 时, $f(x)=3-x$, 则下列

选项不正确的是 ()

A. $f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值是 1

D. 当 $x\in(-1,1)$ 时恒有 $f(x)<0$

21. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(2x+2)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 且当 $x\in[0,1]$ 时,

$f(x)=ax+b$. 若 $f(4)=1$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{7}{2}\right)+f\left(\frac{9}{2}\right)=$ _____.

22. 已知 $y=f(x+4)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, $y=g(x-2)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 且

$y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 ()

A. $y=f(x)$ 是奇函数

B. $y=g(x)$ 是偶函数

C. $y=f(x)$ 关于点 $(2,0)$ 对称

D. $y=g(x)$ 关于直线 $x=4$ 对称

23. 已知函数 $f(x), g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f(x-1)+2$ 是奇函数, $g(x-2)$ 是偶函数,

且 $f(x)-g(x-2)=3, g(-2)=1$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=$ ()

A. -4052

B. -4050

C. -1012

D. -1010

24. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x) = g(2-x)$, $g(2) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} f(k) =$ ()

- A. -2023 B. -1 C. 1 D. 2023

25 (多选题) 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , $g(x+1) + f(1-x) = 1$,

$f(x+1) - g(x+2) = 1$, 且 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称, 则以下说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数 B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x+4)$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = g(x+2)$ D. $g\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

26. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(x)$ 满足 $f(2+3x) = f(-3x)$, $g(x-2)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 且 $g(0) = 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $g(1) = 0$
C. $f(x) = f(x+4)$ D. $\sum_{k=1}^{2024} g\left(\frac{k}{2}\right) = 0$

27. (多选题) 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$, $g'(x)$, 若 $f(x+2) + g(2-x) = 2$, $f'(x) = g'(x+2)$ 且 $y = g(x+1)$ 为偶函数, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $g'(1) = 0$ B. $g(2) + g(3) + g(4) = 0$
C. $g'(x)$ 的图象关于 $x=3$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 为周期函数, 且周期为 4

28. (多选题) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, $g(x)$, 其导函数分别为

$f'(x)$, $g'(x)$, $f(1-x) = 6 - g'(1-x)$, $f(1-x) - g'(1+x) = 6$, 且 $g(x) + g(-x) = 4$,

则 ()

- A. $g'(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称 B. $g'(x+4) = g'(x)$
C. $f'(6) = f'(2)$ D. $f(1) + f(3) = 12$