

嵌套函数的高级应用参考答案

1. 【解析】根据题意，对任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f[f(x) - \log_2 x] = 3$ ，又由 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数，则 $f(x) - \log_2 x$ 为定值，设 $t = f(x) - \log_2 x$ ，则 $f(x) = \log_2 x + t$ ，又由 $f(t) = 3$ ， $\therefore f(t) = \log_2 t + t = 3$ ，所以 $t = 2$ ，所以 $f(x) = \log_2 x + 2$ ，所以 $g(x) = \log_2 x + x - 5$ ，因为 $g(1) < 0$ ， $g(2) < 0$ ， $g(3) < 0$ ， $g(4) > 0$ ， $g(5) > 0$ ，所以零点所在的区间为 $(3, 4)$ 。

2. 【解析】单调函数 $f(x)$ ，对于 $x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(f(x) - e^x - \ln x) = e^2 + 2 \ln \sqrt{2}e$ ，

所以 $f(x) - e^x - \ln x$ 为常数，

令 $f(x) - e^x - \ln x = m$ (m 为常数)，

所以 $f(x) = e^x + \ln x + m$ ，所以 $f(m) = e^m + \ln m + m = e^2 + 2 \ln \sqrt{2}e$ ，

即 $e^m + \ln(m \cdot e^m) + m = e^2 + \ln(2e^2)$ ，

因为函数 $y = e^x$ ， $y = \ln(m \cdot e^m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数，

所以函数 $y = e^x + \ln(m \cdot e^m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

所以 $m = 2$ ，

所以 $f(x) = e^x + \ln x + 2$ ，

又 $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$ ，所以 $f(x) - f'(x) = e^x + \ln x + 2 - \left(e^x + \frac{1}{x}\right)$ ，

因为 x_0 是方程 $f(x) - f'(x) = e$ 的一个解，所以 x_0 是方程 $\ln x - \frac{1}{x} + 2 - e = 0$ 的解，

令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2 - e$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ，

当 $x > 0$ 时 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ 恒成立，

所以 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2 - e$ 单调递增，

又 $g(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} + 2 - e = \ln 2 + \frac{3}{2} - e < 0$ ， $g(3) = \ln 3 - \frac{1}{3} + 2 - e = \ln 3 + \frac{5}{3} - e > 0$ ，

所以 $x_0 \in (2, 3)$ 。

故选：C。

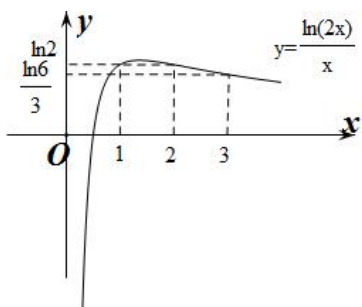
3. 【解析】 $f'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{e}{2}$,

\therefore 当 $0 < x < \frac{e}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x > \frac{e}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

由当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x) > 0$,

作出 $f(x)$ 的大致函数图象如图所示:



$\therefore f^2(x) + af(x) > 0$,

(1) 若 $a = 0$, 即 $f^2(x) > 0$, 显然不等式有无穷多整数解, 不符合题意;

(2) 若 $a > 0$, 则 $f(x) < -a$ 或 $f(x) > 0$, 由图象可知 $f(x) > 0$ 有无穷多整数解, 不符合题意;

(3) 若 $a < 0$, 则 $f(x) < 0$ 或 $f(x) > -a$,

由图象可知 $f(x) < 0$ 无整数解, 故 $f(x) > -a$ 有两个整数解,

$\therefore f(1) = f(2) = \ln 2$, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(x) > -a$ 的两个整数解必为 $x = 1$, $x = 2$,

又 $f(3) = \frac{\ln 6}{3}$, $\therefore \frac{\ln 6}{3} \leq -a < \ln 2$, 解得 $-\ln 2 < a \leq -\frac{\ln 6}{3}$.

故选: A

4. 【解析】依题意, 求导 $f'(x) = \frac{\frac{e}{x} \cdot x^2 - 2xe \ln x}{x^4} = \frac{e(1 - 2 \ln x)}{x^3}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得: $x = \sqrt{e}$,

当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, $f'(x) < 0$, 函数单调递减,

且 $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = \frac{e \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2}$,

又 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$;

设 $f(x) = t$, 显然当 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有两个实数根,

则要使方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根等价于方程 $t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

上有两个不同的实数根,

$$\text{故} \begin{cases} \Delta > 0 \\ (t_1 - \frac{1}{2})(t_2 - \frac{1}{2}) > 0 \\ 0 < t_1 + t_2 < 1 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}, \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{8} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}, \text{解得: } m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

故选: C.

5. 【解析】 $f(x) = \sqrt{e^x + (e-1)x - a}$

由题意, 存在 $y_0 \in [0, 1]$, 使 $f(y_0) = y_0$ 成立,

即存在 $x \in [0, 1]$, 使 $f(x) = x$ 成立,

所以 $\sqrt{e^x + (e-1)x - a} = x$, 即 $e^x + (e-1)x - a = x^2$,

所以 $a = e^x + (e-1)x - x^2$

所以存在 $x \in [0, 1]$, 使 $y = a$ 与 $y = e^x + (e-1)x - x^2$ 有交点,

对 $y = e^x + (e-1)x - x^2$, $x \in [0, 1]$, 求导得 $y' = e^x + e - 1 - 2x$,

设 $g(x) = e^x + e - 1 - 2x$, 则 $g'(x) = e^x - 2$,

令 $g'(x) > 0$, 即 $x > \ln 2$; 令 $g'(x) < 0$, 即 $x < \ln 2$,

所以 $g(x) = e^x + e - 1 - 2x$ 在 $[0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, 1]$ 上单调递增,

所以 $y' = e^x + e - 1 - 2x > y'|_{x=\ln 2} = 2 + e - 1 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) + e - 1 > 0$,

所以 $y = e^x + (e-1)x - x^2$ 在 $x \in [0, 1]$ 上单调递增,

又 $y|_{x=0} = e^0 + (e-1) \times 0 - 0^2 = 1$,

$y|_{x=1} = e^1 + (e-1) \times 1 - 1 = 2e - 2$,

要使 $y = a$ 与 $y = e^x + (e-1)x - x^2$ 有交点, 则 $1 \leq a \leq 2e - 2$,

所以 a 的取值范围是 $[1, 2e - 2]$.

故选: A.

6. 【解析】 $\because f(x) = f(8-x)$,

$\therefore f(-x) = f(8+x)$, 又函数为偶函数, $\therefore f(x) = f(8+x)$, 即函数周期为 $T=8$,

因为不等式 $f^2(x) + af(x) > 0$ 在 $[-20, 20]$ 上有且只有 30 个整数解, 所以不等式在 $(0, 4]$ 上恰有 3 个整数解,

又 $f'(x) = \frac{1 - \ln 2x}{x^2}$, 可知 $x \in (0, \frac{e}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in [\frac{e}{2}, 4]$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{2})$ 上递增, 在 $[\frac{e}{2}, 4]$ 上递减, $f(1) = \ln 2 = f(2) > f(3) > f(4) = \frac{3}{4} \ln 2 > 0$,

所以 1, 2, 3 满足不等式,

$$\text{故 } a < 0, \text{ 且需 } \begin{cases} -a \geq f(4), \\ -a < f(3), \\ -a < f(1), \end{cases} \text{ 解得 } a \in \left(-\frac{1}{3} \ln 6, -\frac{3 \ln 2}{4} \right].$$

故选: D

7. 【解析】首先由已知确定函数 $f(x)$ 的周期是 4, 利用导数研究 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的性质, 单调性、极值, 结合偶函数性质作出 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象, $f(x)$ 的定义域是 $[-100, 100]$ 含有 50 个周期, 方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + 1 = 0$ 有 300 个不同的实数根, 那么在 $f(x)$ 的一个周期内有 6 个根, 令 $f(x) = t$, 可知方程 $t^2 - mt + 1 = 0$ 有两个不等实根 t_1, t_2 , 且 $t_1 \in (-e, -2)$,

$t_2 \in (-2, 0)$, 由二次方程根的分布知识可得解. 由 $f(x+2) = f(x-2)$ 知函数的周期为 4, 当

$x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = (x-2)e^x$, 则 $f'(x) = (x-1)e^x$, 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

当 $1 < x \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, $f(x)_{\text{极小值}} = f(1) = -e$, 又 $f(x)$ 是偶函数, 作出 $f(x)$

在 $[-2, 2]$ 上的图象, 如图.

函数 $f(x)$ 的周期是 4, 定义域为 $[-100, 100]$, 含有 50 个周期,

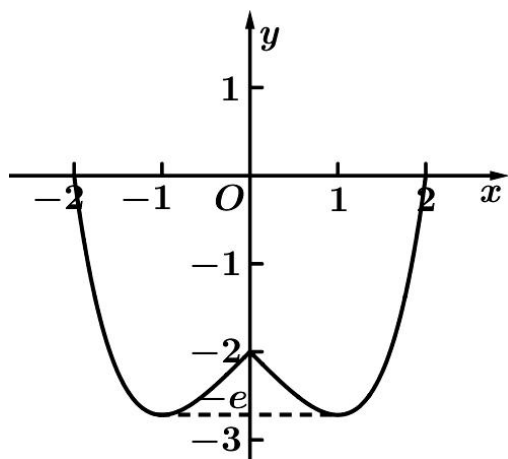
方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + 1 = 0$ 有 300 个不同的实数根, 因此在一个周期内有 6 个根 (这里

$f(\pm 2) = 0$, ± 2 不是方程的根).

令 $f(x) = t$, 方程 $t^2 - mt + 1 = 0$ 有两个不等实根 t_1, t_2 , 且 $t_1 \in (-e, -2)$, $t_2 \in (-2, 0)$, 设

$$g(t) = t^2 - mt + 1, \text{ 则 } \begin{cases} g(-e) > 0 \\ g(-2) < 0 \\ g(0) > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -e - \frac{1}{e} < m < -\frac{5}{2}.$$

故选: A.



8. 【解析】因为 $y_0 = \frac{2e^{x_0+1}}{e^{2x_0}+1} \leq \frac{2e^{x_0+1}}{2e^{x_0}} = e, y_0 = \frac{2e^{x_0-1}}{e^{2x_0}+1} > 0$,所以 $f(f(x)) = x$ 在 $(0, e]$ 上有解

因为 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} + 1 \geq \frac{1-(x-1)+x^2}{x^2} = \frac{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}{x^2} > 0$,(易证 $x \geq \ln x + 1$),所以函数 $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,因此由 $f(f(x)) = x$ 得 $f(x) = x$ 在 $(0, e]$ 上有解, 即

$a = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, e]$,因为 $a' = \frac{1-\ln x}{x^2} \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty, \frac{1}{e}]$, 选 C.