

抽象函数专项参考答案:

1. 【答案】ACD

【分析】A, 应用赋值法,  $x+y=x_1$ ,  $x=x_2$ , 则  $y=x_1-x_2$ , 结合单调性的定义即可判断,

B, 举反例  $f(x)=-x$ , 即可判断; C, 结合偶函数的定义即可判断; D 结合赋值法与抽象函数的单调性即可求解.

【详解】模型解法: 显然该函数复合  $y=kx$  型, 且  $k<0$ .

A 正确。

再由内外复合函数知  $f(\sin x)=k*\sin x$ , 是奇函数, 故 B 错误;  $f(\cos x)=k\cos x$ 。为偶函数, C 正确

对于 D. 当  $x \in [0, 2\pi]$ , 不等式  $f(\sin x) + f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow f(\sin x) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{2}$ , 即  $\sin x > \frac{1}{2}$ ,

$\therefore x \in [0, 2\pi]$ ,  $\therefore f(x) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ . 故选: ACD

常规解法: A. 正确, 设  $x+y=x_1$ ,  $x=x_2$ , 则  $y=x_1-x_2$ ,

$\therefore f(x_1) = f(x_2) + f(x_1-x_2)$ ,  $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1-x_2)$ ,

设  $x_1-x_2 < 0$ , 即  $x_1 < x_2$ ,

$\therefore$  当  $x < 0$  时,  $f(x) > 0$ ,

$\therefore$  当  $x_1-x_2 < 0$  时,  $f(x_1-x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ ,

$\therefore f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减;

B. 错误, 取一个符合要求的具体函数, 如:  $f(x)=-x$ , 则  $f(\sin x)=-\sin x$ , 为奇函数;

C. 正确,  $f(\cos x)$  的定义域为, 且  $\cos(-x) = \cos x$ , 则  $f(\cos(-x)) = f(\cos x)$ , 所以  $f(\cos x)$  为偶函数;

D. 正确, 由  $f(\sin x) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(\sin x - \frac{1}{2}) < 0$ , 又  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减,

令  $x=y=0$ , 则  $f(0) = 2f(0)$ , 则  $f(0) = 0$ ,

则  $\sin x - \frac{1}{2} > 0$ , 即  $\sin x > \frac{1}{2}$ ,  $\therefore x \in [0, 2\pi]$ ,  $\therefore f(x) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ . 故选: ACD

2. 【详解】对于 A,  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ ,  $\therefore f(0) = 0$ , 故 A 正确;

对于 B,  $f(k) = f(k-1) + f(1) = f(k-2) + f(1) + f(1) = \dots = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = kf(1)$ , 故 B 正确;

对于 C,

$$f(x) = f\left(\frac{k-1}{k} \cdot x + \frac{x}{k}\right) = f\left(\frac{k-1}{k}x\right) + f\left(\frac{x}{k}\right) = f\left(\frac{k-2}{k}x\right) + f\left(\frac{x}{k}\right) + f\left(\frac{x}{k}\right)$$

$=\cdots=f\left(\frac{x}{k}\right)+f\left(\frac{x}{k}\right)+\cdots+f\left(\frac{x}{k}\right)=kf\left(\frac{x}{k}\right), k \neq 0$ , 故 C 正确;

对于 D,  $f(x-x)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=f(0)=0$ ,

$f(x)=-f(-x), f(x)f(-x)=-(f(x))^2 \leq 0$ , 故 D 错误.

故选: ABC.

3. 【详解】对于 A 中, 令  $x=y=0$ , 可得  $f(0)=-2$ , 令  $x=1, y=-1$ ,

则  $f(1-1)=f(-1)+f(1)+2$ , 解得  $f(-1)=-4$ , 所以 A 正确;

对于 B 中, 令  $x=x_1, y=x_2-x_1$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1+x_2-x_1)=f(x_1)+f(x_2-x_1)+2$ ,

可得  $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+2$ ,

若  $x > 0$  时,  $f(x) > -2$  时,  $f(x_2)-f(x_1) > 0$ , 此时函数  $f(x)$  为单调递增函数;

若  $x < 0$  时,  $f(x) < -2$  时,  $f(x_2)-f(x_1) < 0$ , 此时函数  $f(x)$  为单调递减函数,

所以函数  $f(x)$  不一定有最大值, 所以 B 错误;

对于 C 中, 令  $y=1$ , 可得  $f(x+1)=f(x)+f(1)+2=f(x)+2$ ,

即  $f(x+1)-f(x)=2$ ,

所以

$f(2024)=[f(2024)-f(2023)]+[f(2023)-f(2022)]+\cdots+[f(3)-f(2)]+[f(2)-f(1)]+f(1)$

$=2023 \times 2 + 0 = 4046$ , 所以 C 正确;

对于 D 中, 令  $y=-x$ , 可得  $f(0)=f(x)+f(-x)+2$ , 可得  $f(x)+2+f(-x)+2=0$ ,

即  $f(x)+2=-[f(-x)+2]$ , 所以函数  $f(x)+2$  是奇函数, 所以 D 正确;

故选: ACD.

4. 【详解】对 A: 令  $x=y=0$ , 则有  $f(0)=f(0)+f(0)-1$ , 故  $f(0)=1$ , 故 A 正确;

对 B: 令  $x=1, y=-1$ , 则有  $f(0)=f(1)+f(-1)-1$ , 故  $f(1)+f(-1)=2$ , 故 B 错误;

对 C: 令  $y > 0$ , 则有  $f(x+y)-f(x)=f(y)-1$ , 其中  $x+y > x$ ,  $f(y)-1 < 0$ ,

令  $x_1=x+y, x_2=x$ , 即有对  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 当  $x_1 > x_2$  时,  $f(x_1)-f(x_2) < 0$  恒成立,

即函数  $f(x)$  为减函数, 故 C 正确;

对 D: 令  $y=-x$ , 则有  $f(x-x)=f(x)+f(-x)-1$ , 又  $f(0)=1$ ,

故  $f(x) + f(-x) = 2$ ，故函数  $y = f(x)$  的图象关于点  $(0, 1)$  对称，故 D 正确。

故选：ACD.

5. 【详解】对 A：令  $x = y = 0$ ，则有  $f(0) = f(0) + f(0) + 0$ ，即  $f(0) = 0$ ，故 A 正确；

对 B：令  $x = y = 1$ ，则有  $f(2) = f(1) + f(1) + 1$ ，又  $f(1) = 0$ ，故  $f(2) = 1$ ，

令  $x = 1$ ， $y = -1$ ，则有  $f(0) = f(1) + f(-1) - 1$ ，故  $f(-1) = 1 \neq -f(2)$ ，故 B 错误；

对 C：令  $y = 1$ ，则有  $f(x+1) = f(x) + f(1) + x$ ，即  $f(x+1) - f(x) = x$ ，

则  $f(2024) = f(2024) - f(2023) + f(2023) - f(2022) + \cdots - f(1) + f(1)$

$$= 2023 + 2022 + \cdots + 1 + 0 = \frac{(2023+1) \times 2023}{2} = 1012 \times 2023，故 C 正确；$$

对 D：令  $y = 1$ ，则有  $f(x+1) = f(x) + f(1) + x$ ，即  $f(x+1) = f(x) + x$ ，

则  $f'(x+1) = f'(x) + 1$ ，即  $f'(x+1) - f'(x) = 1$ ，又  $f'(1) = \frac{1}{2}$ ，故  $f'(k) = \frac{1}{2} + k - 1 = k - \frac{1}{2}$ ，

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{2024} f'(k) = \frac{\left(\frac{1}{2} + 2024 - \frac{1}{2}\right) \times 2024}{2} = 1012 \times 2024，故 D 正确. 故选：ACD.$$

6. 【详解】对于选项 A，令  $x = y = 0$ ，得  $f(0) = f(0) + f(0) + 1$ ，则  $f(0) = -1$ ，所以选项 A 正确；

令  $y = -x$ ，得  $f(0) = f(x) + f(-x) - 4x^2 + 1$ ，则  $f(x) + f(-x) = 4x^2 - 2$ ，

对于选项 B，若  $f(x)$  是偶函数，则  $f(x) = f(-x) = 2x^2 - 1$ ，所以选项 B 正确；

对于选项 D，若  $f(x)$  是奇函数，则  $f(1) + f(-1) = 2 \neq 0$ ，所以  $f(x)$  不可能是奇函数，所以选项 D 错误；

对于选项 C，令  $x = y = 1$ ，得  $f(2) = f(1) + f(1) + 4 + 1 = 7$ ，所以选项 C 错误；

故选：AB.

7. 【详解】令  $x = y = 0$ ，可得  $f(0) = 0$ ，故 A 正确；

令  $x = y = 1$ ，可得  $f(2) = 2$ ，令  $x = -2, y = 2$ ，可得  $f(0) - 8 = f(2) + f(-2)$ ，则  $f(-2) = -10$ ，

故 B 正确；

由  $f(x+y) + 2xy = f(x) + f(y)$ ，可得  $f(x+y) + (x+y)^2 = f(x) + x^2 + f(y) + y^2$ ，令

$g(x) = f(x) + x^2$ ，则  $g(x+y) = g(x) + g(y)$ ，令  $x = y = 0$ ，可得  $g(0) = 0$ ，令  $y = -x$ ，则

$g(0) = g(x) + g(-x) = 0$ , 所以  $g(x)$  是奇函数, 即  $y = f(x) + x^2$  是奇函数, 故 C 正确;

因为  $f(2) - 2^2 \neq f(-2) - (-2)^2$ , 所以  $y = f(x) - x^2$  不是偶函数, 故 D 错误.

故选: ABC.

8. 【详解】方法一: 令  $x = y = 0$ , 得  $f(0) = 0$ , 令  $y = -x$ , 得  $0 = f(x) + f(-x)$ , 所以  $f(x)$  是奇函数, A 正确;

$$\because f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2, \therefore f'(x+y) = f'(x) + 6yx + 3y^2$$

$$\text{令 } x = 0, \therefore f'(y) = f'(0) + 3y^2,$$

$$\text{又 } \because f'(0) = -3, \therefore f'(y) = 3y^2 - 3, \therefore f(y) = y^3 - 3y + c,$$

$$\because f(0) = 0, \therefore c = 0, \therefore f(y) = y^3 - 3y, \therefore f(x) = x^3 - 3x, \therefore f(\sqrt{3}) = 0,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \therefore x = \pm 1, f'(x) > 0, x < -1 \text{ 或 } x > 1, f'(x) < 0, -1 < x < 1$$

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  上为增函数,  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数,

$\therefore x = 1$  是  $f(x)$  的极小值, 故 CD 正确, B 错误.

故选: ACD.

方法二: 构造模型如下

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ f(x+y) &= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x - 3y \\ &= f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 \\ \uparrow f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) \end{aligned}$$

A、C、D 对

9. 【详解】由题意定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$

$$\text{令 } x = y = 0, \text{ 则 } f(0) = f(0) + f(0), \therefore f(0) = 0,$$

$$\text{令 } y = -x, \text{ 则 } f(0) = f(x) + f(-x), \text{ 即 } 0 = f(x) + f(-x), \therefore f(-x) = -f(x),$$

故  $f(x)$  为奇函数, A 正确;

由于  $f(-x) = -f(x)$ , 故  $-f'(-x) = -f'(x)$ , 即  $f'(-x) = f'(x)$ ,

则  $f'(x)$  为偶函数, 由  $f'(1) = 2$  可得  $f'(-1) = 2$ ,

由  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ , 令  $y=1$  得  $f(x+1) = f(x) + f(1) + x(x+1)$ ,

故  $f'(x+1) = f'(x) + 2x + 1$ , 令  $x = -2$ , 则  $f'(-1) = f'(-2) - 3, \therefore f'(-2) = 5$ , B 错误;

又  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ ,

$$\text{则 } f(x+y) - \frac{(x+y)^3}{3} = f(x) - \frac{x^3}{3} + f(y) - \frac{y^3}{3},$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}, \text{ 则 } g(x+y) = g(x) + g(y),$$

$$\text{由柯西方程知, } g(x) = g(1) \cdot x, \text{ 故 } f(x) = g(x) + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} + g(1) \cdot x,$$

$$\text{则 } f'(x) = x^2 + g(1), \text{ 由于 } f'(1) = 2, \text{ 故 } 1 + g(1) = 2, \therefore g(1) = 1,$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{x^3}{3} + x, \text{ 则 } f(3) = 12, \text{ C 正确;}$$

对

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{(x_1+x_2)^3}{3} + \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^3}{3} + x_1 + \frac{x_2^3}{3} + x_2\right)$$

$$= \frac{1}{8}(-x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) = -\frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2) < 0,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ D 正确,}$$

故选: ACD

10. 【详解】由定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) + f(y) = f(x+y)$ ,

令  $x = y = 0$ , 可得  $2f(0) = f(0)$ , 可得  $f(0) = 0$ , 所以 A 正确;

令  $y = -x$ , 可得  $f(x) + f(-x) = f(0)$ , 因为  $f(0) = 0$ , 可得  $f(-x) = -f(x)$ ,

所以函数  $f(x)$  为定义域上的奇函数, 所以 C 正确;

用  $-y$  代替  $y$ , 可得  $f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = f(x-y)$ , 所以 B 正确;

任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0$ ,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1 - x_2),$$

其中  $f(x_1 - x_2)$  的符号不确定, 所以函数  $f(x)$  的单调性不确定,

所以  $f(x)$  在区间  $[m, n]$  上的最大值不一定为  $f(n)$ , 所以 D 不正确.

故选: ABC.

11. 【详解】A 选项: 令  $x = y = 0$ , 得  $f(0) = 0$ , 故 A 正确;

$$\text{B 选项: 令 } y = -x, \text{ 则 } f(0) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 - f(x)f(-x)} = 0, \text{ 因此 } f(-x) = -f(x),$$

又  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq 4k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$ , 关于  $x$  轴对称, 所以  $f(x)$  为奇函数, 故 B 错误;

$$\text{C 选项: 令 } y = 1, \text{ 则 } f(x+1) = \frac{f(x) + f(1)}{1 - f(x)f(1)} = \frac{f(x+1)}{1 - f(x)} = -1 + \frac{2}{1 - f(x)},$$

$$\text{所以 } f(x+2) = -1 + \frac{2}{1 - f(x+1)} = -\frac{1}{f(x)}, \text{ 因此 } f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x),$$

所以  $f(x)$  为周期函数, 且周期为 4, 故 C 错误;

$$\text{D 选项: } f(2023) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -1, \text{ 故 D 正确.}$$

故选: AD.

$$12. \text{【详解】对任意的 } x, y \in (-1, 1), \text{ 都有 } f(x+y)[1 - f(x)f(y)] = f(x) + f(y),$$

$$\text{令 } x = y = 0, \text{ 则 } f(0)[1 - f(0)f(0)] = f(0) + f(0), \quad f(0)[-1 - f^2(0)] = 0,$$

$$\text{即 } f(0)[1 + f^2(0)] = 0, \text{ 由 } 1 + f^2(0) > 0, \text{ 可得 } f(0) = 0,$$

$$\text{令 } y = -x, \text{ 则 } f(x-x) = f(0) = f(x) + f(-x),$$

$$\therefore f(-x) = -f(x), \therefore f(x) \text{ 是奇函数.}$$

$$\text{设 } x_1, x_2 \in [0, 1), \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 则 } x_1 - x_2 < 0, \text{ 令 } y = -x_2,$$

$$\text{则 } f(x_1 - x_2)[1 - f(x_1)f(-x_2)] = f(x_1) + f(-x_2),$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 是奇函数, 可得 } f(x_1 - x_2)[1 + f(x_1)f(x_2)] = f(x_1) - f(x_2),$$

$$\because \text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > 0, \text{ 且 } x_1, x_2 \in [0, 1), \therefore 1 + f(x_1)f(x_2) > 0,$$

$$\text{由函数 } f(x) \text{ 是奇函数, 可得当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) < 0,$$

$$\therefore f(x_1 - x_2)[1 + f(x_1)f(x_2)] < 0, \text{ 即 } f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $[0,1)$  上是增函数,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(-1,1)$  上是增函数,

则不等式  $f(\ln x) < f\left(\frac{1}{2}\right)$  等价于  $\begin{cases} -1 < \ln x < 1 \\ \ln x < \frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得  $\frac{1}{e} < x < \sqrt{e}$ ,

即不等式的取值范围是  $\left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$ .

故选: B

13. 【详解】在  $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$  中, 又有  $f(1)=\frac{1}{2}$ ,

令  $x=1, y=0$  得  $f(1)+f(1)=2f(1)f(0)$ , 所以  $f(0)=1$ , A 正确;

令  $x=0$  得  $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$ , 所以  $f(-y)=f(y)$ ,  $f(x)$  是偶函数, B 正确;

令  $x=y=1$  得  $f(2)+f(0)=2[f(1)]^2$ , 所以  $f(2)=-\frac{1}{2}$ ,

令  $x=2, y=1$  得  $f(3)+f(1)=2f(2)f(1)$ , 所以  $f(3)=-1$ ,

令  $x=y=3$  得  $f(6)+f(0)=2[f(3)]^2$ ,  $f(6)=1$ , C 错误;

令  $y=1$  得  $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)f(1)=f(x)$ , 所以  $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ ,

由此  $f(x+2)=f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)-f(x)=-f(x-1)$ , 即  $f(x+3)=-f(x)$ ,  
所以  $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$ ,  $f(x)$  是周期为 6 的周期函数,

$f(4)=f(3)-f(2)=-\frac{1}{2}$ ,  $f(5)=f(4)-f(3)=\frac{1}{2}$ ,  $f(6)=f(5)-f(4)=1$ ,

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=0$ ,

所以  $\sum_{n=1}^{2024} f(n)=337 \times 0 + f(1) + f(2) = 0$ , D 正确.

故选: ABD.

14. 【详解】对于 A 选项, 令  $x=y=1$  可得  $2f(1)=2f(1)f(0)$ ,

因为  $f(1)=-1$ , 则  $f(0)=1$ ,

令  $x=1, y=0$ , 可得  $2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=f(1)+f(0)=0$ , 则  $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ , A 对;

对于 B 选项, 令  $y=x$  可得  $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)=2f(x)$ ,

所以,  $f(-x)=f(x)$ , 故函数  $f(x)$  为偶函数,

令  $y=x+1$  可得  $f(x)+f(x+1)=2f\left(x+\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=2f\left(x+\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ ,

即  $f(x+1)=-f(x)$ , 故  $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$ ,

因为函数  $f(x)$  为偶函数, 则函数  $f(x+2)$  为偶函数, B 对;

对于 C 选项, 因为  $f(x+1) = -f(x)$ ,

因为函数  $f(x)$  为偶函数, 则函数  $f(x+1)$  也为偶函数, C 错;

对于 D 选项, 由 B 选项可知, 函数  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数,

因为  $f(1) = -1$ ,  $f(1) + f(2) = 0$ ,

所以,  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2025) = 1012[f(1) + f(2)] + f(1) = -1$ , D 对.

**故选: ABD.**

15. 【详解】对 A: 令  $x = y = \frac{1}{2}$ , 则有  $2f(1)f(0) = f(1) + f(1)$ , 又  $f(1) = -1$ ,

故有  $-2f(0) = -2$ , 故  $f(0) = 1$ , 故 A 正确;

对 B: 令  $y = -x$ , 则有  $2f(0)f(2x) = f(2x) + f(-2x)$ , 又  $f(0) = 1$ ,

故有  $f(2x) = f(-2x)$ , 即  $f(x) = f(-x)$ , 又其定义域为  $\mathbf{R}$ ,

故  $f(x)$  为偶函数, 故 B 正确;

对 C: 令  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 0$ , 则有  $2f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f(0) = -1 + 1 = 0$ ,

故  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , 又  $f(1) = -1$ , 不符合, 故 C 错误;

对 D: 令  $y = x - \frac{1}{2}$ , 则有  $2f\left(2x - \frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2x) + f(2x - 1)$ ,

由  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , 故  $f(2x) + f(2x - 1) = 0$ , 则  $f(x) + f(x - 1) = 0$ , 故  $f(x + 1) + f(x) = 0$ ,

两式作差并整理得  $f(x + 1) = f(x - 1)$ , 故 2 是函数  $f(x)$  的一个周期, 故 D 正确.

**故选: ABD.**

16. 【详解】模型解法一: 构造正弦双曲函数即可

常规解法二:

对 A, 令  $x - y = 0$ , 则  $f^2(0) = f^2(0) - f^2(0)$ , 得  $f(0) = 0$ , 故 A 错误;

对 B, 令  $x = 0$ , 得  $f(y)f(-y) = f^2(0) - f^2(y)$ ,

由  $f(0) = 0$  整理可得  $f(y)[f(-y) + f(y)] = 0$ ,

将  $y$  变换为  $-y$ , 则  $f(-y)[f(y) + f(-y)] = 0$ ,



故  $[f(y)+f(-y)]^2=0$ , 故  $f(-y)+f(y)=0$ , 故  $f(x)$  是奇函数, 故 B 错误;

对 C, 设  $x_2 > x_1 > 0$ , 则  $f(x_2) > 0, f(x_1) > 0$ ,

$$\text{且 } f^2(x_2) - f^2(x_1) = (f(x_2) + f(x_1))(f(x_2) - f(x_1))$$

$$= f(x_2 + x_1)f(x_2 - x_1) > 0, \text{ 故 } f^2(x_2) - f^2(x_1) > 0, \text{ 则 } f(x_2) > f(x_1).$$

又  $f(0)=0$ ,  $f(x)$  是奇函数, 故  $f(x)$  是增函数, 故 C 正确;

对 D, 由  $f(x)$  是增函数可得  $f(x)$  不是周期函数, 故 D 错误.

故选: C

17. 【详解】模型解法一: 构造正弦函数  $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  即可

常规解法二:

对于 A, 因为  $f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$ ,

令  $x=y=0$ , 则  $f(0)f(0) = f^2(0) - f^2(0)$ , 故  $f^2(0)=0$ , 则  $f(0)=0$ , 故 A 正确;

对于 B, 因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 关于原点对称,

令  $x=0$ , 则  $f(y)f(-y) = f^2(0) - f^2(y)$ , 又  $f(y)$  不恒为 0, 故  $f(-y) = -f(y)$ ,

所以  $f(x)$  为奇函数, 故 B 错误;

对于 C, 因为  $f\left(2x + \frac{3}{2}\right)$  为偶函数, 所以  $f\left(-2x + \frac{3}{2}\right) = f\left(2x + \frac{3}{2}\right)$ , 令  $-t = -2x + \frac{3}{2}$ , 则

$$2x = t + \frac{3}{2}, \text{ 故 } f(-t) = f(t+3),$$

令  $t = -2x + \frac{3}{2}$ , 则  $2x = -t + \frac{3}{2}$ , 故  $f(t) = f(-t+3)$ , 又  $f(x)$  为奇函数, 故  $f(-t) = -f(t)$ ,

所以  $f(t+3) = -f(-t+3)$ , 即  $f(3+x) = -f(3-x)$ , 故 C 正确;

对于 D, 由选项 C 可知  $f(t+3) = f(-t) = -f(t)$ , 所以  $f(t+6) = -f(t+3) = f(t)$ , 故  $f(x)$  的一个周期为 6,

因为  $f(1) = \sqrt{3}$ , 所以  $f(-1) = -f(1) = -\sqrt{3}$ , 对于  $f(t) = f(-t+3)$ , 令  $t=2$ , 得

$$f(2) = f(1) = \sqrt{3}, \text{ 则 } f(-2) = -\sqrt{3},$$

令  $t=3$ , 得  $f(3) = f(0) = 0$ , 则  $f(-3) = 0$ , 令  $t=4$ , 得  $f(4) = f(-1) = -\sqrt{3}$ , 令  $t=5$ , 得

$$f(5) = f(-2) = -\sqrt{3},$$

令  $t=6$ ，得  $f(6)=f(-3)=0$ ，所以

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=\sqrt{3}+\sqrt{3}+0-\sqrt{3}-\sqrt{3}+0=0，$$

又  $2023=337\times 6+1$ ，所以由  $f(x)$  的周期性可得：

$$\sum_{k=1}^{2023} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=f(1)=\sqrt{3}，故 D 正确。$$

故选：ACD.

18. 【详解】 模型解法一：构造  $f(x)=a\sin x+b\cos x$  即可。

$$f(0)=b\cos 0=1, \quad b=1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2}=a=1$$

$$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

常规解法二：

$$\text{解：令 } x=0, \quad y=t, \quad \text{得 } f(t)+f(-t)=2\cos t, \quad \text{令 } x=\frac{\pi}{2}+t, \quad y=\frac{\pi}{2}, \quad \text{得 } f(\pi+t)+f(t)=0,$$

$$\text{令 } x=\frac{\pi}{2}, \quad y=\frac{\pi}{2}+t, \quad \text{得 } f(\pi+t)+f(-t)=-2\sin t, \quad \text{由以上 3 式，得}$$

$$f(t)=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{即 } f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \text{ 则 } f(x) \text{ 的周期为 } T=2\pi, \text{ 故 A 错误；}$$

$$f(x) \text{ 的最大值为 } \sqrt{2}, \text{ 故 B 错误；}$$

$$\text{令 } x\in\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \text{ 则 } x+\frac{\pi}{4}\in\left(0, \frac{3\pi}{4}\right), \text{ 故 } f(x) \text{ 的在区间 }\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 上不单调递减，故 C 错误；}$$

$$\text{因为 } f(-x)=\sqrt{2}\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } f(-x)\neq f(x), \text{ 且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以  $f(x)$  既不是奇函数也不是偶函数，故 D 正确。

故选：D.

$$19. \text{【详解】 因为函数 } f\left(\frac{1}{2}x+1\right) \text{ 为偶函数，则 } f\left(1-\frac{1}{2}x\right)=f\left(1+\frac{1}{2}x\right),$$

$$\text{令 } t=\frac{1}{2}x \text{ 可得 } f(1-t)=f(1+t), \text{ 所以， } f(1+x)=f(1-x),$$

$$\text{因为函数 } f(x-1) \text{ 为奇函数，则 } f(-x-1)=-f(x-1),$$

所以，函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称，关于点  $(-1,0)$  对称，

$$\text{又因为函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 则 } f(-1)=0, \text{ 则 } f(3)=f(-1)=0,$$

$f(1)$ 、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $f(0)$ 的值都不确定.

故选: D.

20. 【详解】因为函数  $f(2x+1)$  是奇函数,

所以  $f(2x)$  的图象关于点  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  对称, 所以  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称, 所以,

$$f(-x) = -f(2+x);$$

因为  $f(x+2)$  是偶函数, 所以  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称, 所以,  $f(-x) = f(4+x)$ .

所以,  $f(4+x) = -f(2+x) = f(x)$ , 所以  $f(x)$  周期为 4.

对于 A 项, 因为  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称,  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称, 所以  $(3, 0)$

也是  $f(x)$  的对称中心.

因为  $x \in [2, 3]$  时,  $f(x) = 3-x$ ,

$\forall x \in [3, 4]$ , 则  $6-x \in [2, 3]$ , 所以  $f(6-x) = 3-(6-x) = x-3$ .

根据函数的对称性可知,  $f(3-x) = -f(3+x)$ , 所以  $f(x) = -f(6-x) = 3-x$ .

所以当  $x \in [2, 4]$  时,  $f(x) = 3-x$  单调递减.

又  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称, 所以  $f(x)$  在区间  $(-2, 0)$  上单调递减, 故 A 项正确;

对于 B 项, 因为  $f(x)$  的图象关于点  $(3, 0)$  对称,  $f(x)$  周期为 4, 所以  $f(x)$  的图象关于点  $(-1, 0)$

对称, 故 B 项错误;

对于 C 项, 由 A 知, 当  $x \in [2, 4]$  时,  $f(x) = 3-x$ , 所以  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .

又  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称, 所以当  $x \in [0, 2]$  时, 有  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .

综上所述, 当  $x \in [0, 4]$  时, 有  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .

因为  $f(x)$  周期为 4, 所以  $f(x)$  的最大值是 1, 故 C 项正确;

对于 D 项, 由已知当  $x \in [2, 3]$  时,  $f(x) = 3-x > 0$ .

又  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称, 所以当  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) > 0$ .

综上所述, 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f(x) > 0$  恒成立.

因为  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称, 所以, 当  $x \in (-1, 1)$  时, 恒有  $f(x) < 0$ , 故 D 项正确.

故选：B.

21. 【详解】解：因为  $f(2x+2)$  为偶函数，所以  $f(-2x+2) = f(2x+2)$ ，即  $f(-x+2) = f(x+2)$ ，

所以函数  $f(x)$  关于  $x=2$  对称，所以  $f(-x) = f(x+4)$ ，又因为  $f(x+1)$  为奇函数，所以

$$f(-x+1) = -f(x+1),$$

所以函数  $f(x)$  关于  $(1,0)$  对称， $f(-x) = -f(x+2) = -f(-x+2)$ ，即  $f(x) = -f(x+2)$ ，

所以  $f(x+2) = -f(x)$ ， $f[(x+2)+2] = -f(x+2) = f(x)$ ，即  $f(x+4) = f(x)$ ，所以  $f(x)$  的周期为 4，

在  $f(-x+1) = -f(x+1)$  中令  $x=0$ ，得  $f(1) = -f(1)$ ，所以  $f(1) = 0$ ，即  $a+b=0$ ，

又因为  $f(4)=1$ ，所以  $f(0)=1$ ，即  $b=1$ ，所以  $a=-1$  所以当  $x \in [0,1]$  时， $f(x) = -x+1$ ，

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{2}\right) = f\left(2 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(2 + \frac{3}{2}\right) = f\left(2 - \frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(4 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 所以则 } f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f\left(\frac{9}{2}\right) = 0.$$

故答案为：0.

22. 【详解】由于  $y = f(x+4)$  是定义域为  $\mathbb{R}$  的奇函数，则  $y = f(x)$  的图象关于  $(4,0)$  成中心对称，

$y = g(x-2)$  是定义域为  $\mathbb{R}$  的偶函数，则  $y = g(x)$  的图象关于  $x=-2$  对称，

因为  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称，则  $y = f(x)$  的图象关于  $x=2$  对称，

又  $y = f(x)$  的图象关于  $(4,0)$  成中心对称，则  $y = f(x)$  的图象关于  $(0,0)$  成中心对称，

故  $y = f(x)$  为奇函数，A 正确；

因为  $y = f(x)$  为奇函数，故  $f(-x) = -f(x)$ ，

由  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称，可得  $f(x) = g(-x)$ ， $g(x) = f(-x)$ ，

故  $g(-x) = f(x) = -f(-x) = -g(x)$ ，故  $y = g(x)$  为奇函数，B 错误；

由 A 的分析可知  $y = f(x)$  的图象关于  $x = 2$  对称，故 C 错误；

由 A 的分析可知  $y = f(x)$  的图象关于  $(4, 0)$  成中心对称， $y = f(x)$  为奇函数，

则  $y = f(x)$  的图象也关于  $(-4, 0)$  成中心对称，

而  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称，

则  $y = g(x)$  的图象关于  $(4, 0)$  成中心对称，故 D 错误，

故选：A

23. 【详解】因为  $g(x-2)$  是偶函数，所以  $g(-2-x) = g(-2+x)$ ，由  $f(x) - g(-2+x) = 3$  知，

$f(-x) - g(-2-x) = 3$ ，所以  $f(-x) = f(x)$ ，则  $f(x)$  为偶函数.

由  $f(x-1)+2$  是奇函数可知， $f(-x-1)+2 = -[f(x-1)+2]$ ，所以  $f(-x-1)+f(x-1) = -4$ ，

则  $f(-2-x)+f(x) = -4$ ，则  $f(-2+x)+f(-x) = -4$ ，

所以  $f(-2+x)+f(x) = -4$ ，所以  $f(-2-x) = f(-2+x)$ ，则  $f(-x) = f(-4+x)$ ，所以

$f(x) = f(-4+x)$ ，则 4 为  $f(x)$  的一个周期.

由  $f(-x-1)+f(x-1) = -4$  得， $f(-1)+f(-1) = -4$ ，则  $f(1)+f(1) = -4$ ，所以  $f(1) = -2$ ，

由  $f(-x-1)+f(x-1) = -4$  得， $f(-3)+f(1) = -4$ ，即  $f(3)+f(1) = -4$ ，所以  $f(3) = -2$ ，

由  $f(x) - g(x-2) = 3$ ，得  $f(0) - g(-2) = 3$ ，又  $g(-2) = 1$ ，所以  $f(0) = f(4) = 4$ ；

在  $f(-2+x)+f(x) = -4$  中，令  $x = 4$ ，得  $f(2)+f(4) = -4$ ，所以  $f(2) = -4 - f(4) = -8$ .

$$\sum_{k=1}^{2023} f(k) = 505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)] + f(1)+f(2)+f(3) = 505 \times (-8) - 12 = -4052.$$

故选：A.

24. 【详解】因为  $f(x) = g(2-x)$ ，所以  $f(2-x) = g(x)$ （利用“ $2-x$ ”替换上式中的“ $x$ ”），故  $f(2+x) = g(-x)$ ，又  $g(x)$  是偶函数，所以  $g(x) = g(-x)$ ，故  $f(2+x) = f(2-x)$ 。

因为  $f(x+1)$  是奇函数，所以  $f(x+1) = -f(-x+1)$ ，即  $f(x) = -f(2-x) = -f(x+2)$ ，

所以  $f(x+2) = -f((x+2)+2) = -f(x+4)$ ，所以  $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，

即  $f(x)$  是周期为 4 的函数. 由  $g(2) = 1$ ，得  $g(2-0) = f(0) = 1$ ，故  $f(4) = f(0) = 1$ 。

在  $f(x+1) = -f(-x+1)$  中，令  $x = 0$ ，则  $f(1) = -f(1)$ ，故  $f(1) = 0$ ，

又  $f(2) = -f(0) = -1$ ， $f(3) = f(1) = 0$ ，

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2023} f(k) &= 505 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= 505 \times (0 - 1 + 0 + 1) + 0 - 1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

故选: B.

25. 【详解】对于 B, 由  $f(x+1) - g(x+2) = 1$ , 得  $f(x) - g(x+1) = 1$ ,

又  $g(x+1) + f(1-x) = 1$ ,  $\therefore f(x) + f(1-x) = 2$ ,

$\therefore y = f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称,  $\therefore f(1-x) = f(1+x)$ ,

$\therefore f(x) + f(1+x) = 2, \therefore f(x+2) + f(1+x) = 2$ ,

$\therefore f(x) = f(x+2)$ , 则  $f(x)$  是周期函数, 且周期为  $T=2$ ,

所以  $f(x) = f(x+4)$ , 故 B 正确;

对于 A,  $\because y = f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称,

$\therefore f(-x) = f(2+x), \therefore f(x) = f(-x), \therefore f(x)$  是偶函数,

若  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(x) = 0$  恒成立, 不满足  $f(x) + f(1+x) = 2$ , 故 A 错误;

对于 C, 由  $f(x+1) - g(x+2) = 1$ , 得  $g(x) + f(2-x) = 1$ ,

$\therefore g(x) + f(x) = 1, \therefore g(2+x) + f(2+x) = 1$ ,

因为  $f(x) = f(x+2)$ , 则  $g(x+2) = g(x)$ ,

所以  $g(x)$  是周期函数, 且周期为  $T=2$ , 则  $g(x) = g(x+2)$ , 故 C 正确;

对于 D, 由  $f(x) + f(1-x) = 2$ , 得  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ,

又  $f(x) = f(x+2), \therefore f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$ ,

由  $g(x) + f(x) = 1$ , 得  $g\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 1, \therefore g\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ , 故 D 正确.

故选: BCD.

26. 【详解】对于 A 选项, 因为函数  $g(x-2)$  的图象关于直线  $x=2$  对称,

则  $g(2-x-2) = g(2+x-2)$ ,

即  $g(-x) = g(x)$ , 所以, 函数  $g(x)$  为偶函数,

又因为  $g(x) = f'(x)$ , 则  $f'(-x) = f'(x)$ ,

令  $h(x) = f(x) + f(-x)$ , 则  $h'(x) = f'(x) - f'(-x) = 0$ , 所以,  $h(x)$  为常值函数,

设  $h(x) = f(x) + f(-x) = C$ , 其中  $C$  为常数,

当  $C \neq 0$  时,  $f(-x) = C - f(x) \neq -f(x)$ , 此时, 函数  $f(x)$  不是奇函数, A 错;

对于 B 选项, 因为  $f(2+3x) = f(-3x)$ , 令  $t = 3x$ , 可得  $f(t+2) = f(-t)$ ,

即  $f(x+2) = f(-x)$ ,

等式  $f(x+2)=f(-x)$  两边求导得  $f'(x+2)=-f'(-x)$ , 即  $g(x+2)+g(-x)=0$ ,

所以, 函数  $g(x)$  的图象关于点  $(1,0)$  对称,

在等式  $g(x+2)+g(-x)=g(x+2)+g(x)=0$  中, 令  $x=-1$  可得  $2g(1)=0$ , 可得  $g(1)=0$ , B 对;

对于 C 选项, 因为  $f(x)+f(-x)=C$ , 则  $f(x+2)+f(x)=C$ ,

可得  $f(x+2)=C-f(x)$ ,

所以,  $f(x+4)=C-f(x+2)=C-[C-f(x)]=f(x)$ , C 对;

对于 D 选项, 在等式  $f(x)=f(x+4)$  两边同时求导得  $f'(x)=f'(x+4)$ , 即  $g(x)=g(x+4)$ ,

所以, 函数  $g(x)$  是以 4 为周期的周期函数,

因为  $g(x+2)+g(-x)=g(x+2)+g(x)=0$ , 所以,  $g(1)=0$ ,  $g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ ,

$g(2)+g(0)=g(2)+1=0$ , 可得  $g(2)=-1$ ,

$g\left(\frac{5}{2}\right)+g\left(\frac{7}{2}\right)=g\left(\frac{5}{2}\right)+g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ,  $g(3)=g(3-4)=g(-1)$ ,

由  $g(x+2)+g(-x)=g(x+2)+g(x)=0$  中令  $x=1$ , 可得  $g(3)+g(-1)=0$ , 则  $g(3)=0$ ,

$g(4)=g(0)=1$ ,

所以,  $g\left(\frac{1}{2}\right)+g(1)+g\left(\frac{3}{2}\right)+g(2)+g\left(\frac{5}{2}\right)+g(3)+g\left(\frac{7}{2}\right)+g(4)$

$=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0-1+0+1=0$ ,

因为  $2024=4\times 506$ , 则  $\sum_{k=1}^{2024}g\left(\frac{k}{2}\right)=506\sum_{k=1}^8g\left(\frac{k}{2}\right)=0$ , D 对.

故选: BCD.

27.【详解】A: 因为  $y=g(x+1)$  为偶函数, 所以  $g(-x+1)=g(x+1)$ , 所以  $-g'(-x+1)=g'(x+1)$ ,

令  $x=0$ , 则  $-g'(1)=g'(1)$ , 所以  $g'(1)=0$ , 故 A 正确;

D: 因为  $f(x)=g(x+2)$ , 所以  $f(x)=g(x+2)+m$ ,

用  $-x$  代替原来的  $x$  得  $f(-x)=g(2-x)+m$ , ①

又  $y=g(x+1)$  为偶函数, 所以  $g(-x+1)=g(x+1)$ ,

用  $x-1$  代替原来的  $x$  得:  $g(2-x)=g(x)$ , ②

由①②得  $f(-x)=g(x)+m$ , ③

又  $f(x+2)+g(2-x)=2$ , 用  $-x-2$  代替原来的  $x$  得:  $f(-x)+g(x+4)=2$ , ④

由③④联立得:  $g(x)+m+g(x+4)=2$ , ⑤

用  $x+4$  代替原来的  $x$  得:  $g(x+4)+m+g(x+8)=2$ , ⑥

⑥减去⑤得:  $g(x+8)=g(x)$ , 故  $g(x)$  为周期函数, 且周期为 8,

用  $-x$  代替原来的  $x$  得:  $g(8-x)=g(-x)$ , ⑦

因为  $f(x+2)+g(2-x)=2$ , 用  $x+2$  代替原来的  $x$  得:  $f(x+4)+g(-x)=2$ , ⑧

因为  $f(x+2)+g(2-x)=2$ , 用  $x-6$  代替原来的  $x$  得:  $f(x-4)+g(8-x)=2$ , ⑨

由⑦⑧⑨得:  $f(x-4)=f(x+4)$ ,

用  $x+4$  代替原来的  $x$  得:  $f(x)=f(x+8)$ ,

所以  $f(x)$  为周期函数, 且周期为 8, 故 D 错误;

B: 因为常函数  $f(1)=g(1)=1$  为满足题意得一组解, 但  $g(2)+g(3)+g(4)=3 \neq 0$ , 故 B 错误;

C: 由  $f(x+2)+g(2-x)=2$ , 则  $f'(x+2)-g'(2-x)=0$ , 即  $f'(x)=g'(4-x)$ ,

又  $f(x)=g(x+2)$ , 则  $g'(4-x)=g'(x+2)$ , 即  $g'(6-x)=g'(x)$ , 故 C 正确;

故选: AC.

28. 【详解】由题意可得  $\begin{cases} f(1-x)=6-g'(1-x) \\ f(1-x)=6+g'(1+x) \end{cases}$ , 两式相减可得  $g'(1+x)=-g'(1-x)$  ①,

所以  $g'(x)$  的图象关于点  $(1,0)$  中心对称, A 错误;

由  $g(x)+g(-x)=4$  ②, ②式两边对  $x$  求导可得  $g'(x)=g'(-x)$ , 可知  $g'(x)$  是偶函数,

以  $1+x$  替换①中的  $x$  可得  $g'(2+x)=-g'(-x)=-g'(x)$ ,

可得  $g'(4+x)=-g'(2+x)=g'(x)$ , 所以  $g'(x)$  是周期为 4 的周期函数, B 正确;

因为  $f(x)=6-g'(x)$ , 可知  $f(x)$  也是周期为 4 的周期函数, 即  $f(x+4)=f(x)$ ,

两边求导可得  $f'(x+4)=f'(x)$ , 所以  $f'(6)=f'(2)$ , C 正确;



因为  $g'(1+x) = -g'(1-x)$ ，令  $x=0$ ，则  $g'(1) = -g'(1)$ ，即  $g'(1) = 0$ ，

又因为  $g'(x)$  是偶函数，所以  $g'(-1) = g'(1) = 0$ ，

又因为  $g'(x)$  是周期为 4 的周期函数，则  $g'(3) = g'(-1) = 0$ ，

由  $f(x) = 6 - g'(x)$  可得  $\begin{cases} f(1) = 6 - g'(1) = 6 \\ f(3) = 6 - g'(3) = 6 \end{cases}$ ，

所以  $f(1) + f(3) = 12$ ，D 正确.

故选：BCD