

导数在函数的极值方面运用专题参考答案

1. 【解析】选 A. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 由题意得 $\begin{cases} f'(1) = 0, \\ f(1) = 10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2a + b + 3 = 0, \\ a^2 + a + b = 9, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 4, \\ b = -11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -3, \\ b = 3 \end{cases}$ (舍去).

2. 【解析】选 A. $f'(x) = 3x^2 + 6mx + n$, 依题意有 $\begin{cases} f(-1) = 0, \\ f'(-1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m^2 + 3m - n - 1 = 0, \\ -6m + n + 3 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m = 2, \\ n = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = 1, \\ n = 3 \end{cases}$, 检验知当 $\begin{cases} m = 1, \\ n = 3 \end{cases}$ 时, 函数没有极值. 所以 $m+n=11$.

3. 【解析】 $y' = e^x + a = 0$, $e^x = -a$, $x = \ln(-a)$,

$\because x > 0$, $\therefore \ln(-a) > 0$ 且 $a < 0$.

$\therefore -a > 1$, 即 $a < -1$.

[答案] A

4. 【解析】函数 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + (4a+2)x - a(a+2)\ln x$ 的导数为

$$f'(x) = -3x + (4a+2) - \frac{a(a+2)}{x} = \frac{-3x^2 + (4a+2)x - a(a+2)}{x},$$

令 $g(x) = -3x^2 + (4a+2)x - a(a+2)$,

由题意可得, $g(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内有解.

若 $g(x) = 0$ 只有一解,

则有 $g(0)g(1) < 0$, 即 $-a(a+2)(-a^2+2a-1) < 0$,

解得 $-2 < a < 0$;

若 $g(x) = 0$ 有两解,

$$\text{则 } \begin{cases} g(0) < 0 \\ g(1) < 0 \\ (4a+2)^2 - 12a(a+2) > 0 \end{cases} \text{ 即有 } \begin{cases} a > 0 \text{ 或 } a < -2 \\ a \neq 1 \\ a \neq 1 \\ -\frac{1}{2} < a < 1 \end{cases},$$

解得 $0 < a < 1$.

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x$ 在 $x = \frac{2}{3}$ 处取得极大值, 成立.

综上可得 a 的取值范围是 $(-2,1)$.

故选: D.

5. 【解析】 $f'(x) = ax - (1 + 2a) + \frac{2}{x} = \frac{(x-2)(ax-1)}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = \frac{1}{a}$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 有极小值,

$$\therefore 3 < \frac{1}{a} < 4,$$

$$\therefore \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3},$$

故选: A.

6. 【解析】 $f'(x) = ax - (1 + 2a) + \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - (2a+1)x + 2}{x}$, ($a > 0, x > 0$)

若 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 有极大值,

则 $f'(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 先大于 0, 再小于 0,

$$\text{则} \begin{cases} f'(\frac{1}{2}) > 0 \\ f'(1) < 0 \end{cases}, \text{解得: } 1 < a < 2,$$

故选: C.

7. 【解析】由题意, $y' = \ln x + 1 - 2ax$

令 $f'(x) = \ln x - 2ax + 1 = 0$ 得 $\ln x = 2ax - 1$,

函数 $y = x \ln x - ax^2$ 有两个极值点, 等价于 $f'(x) = \ln x - 2ax + 1$ 有两个零点,

等价于函数 $y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点,

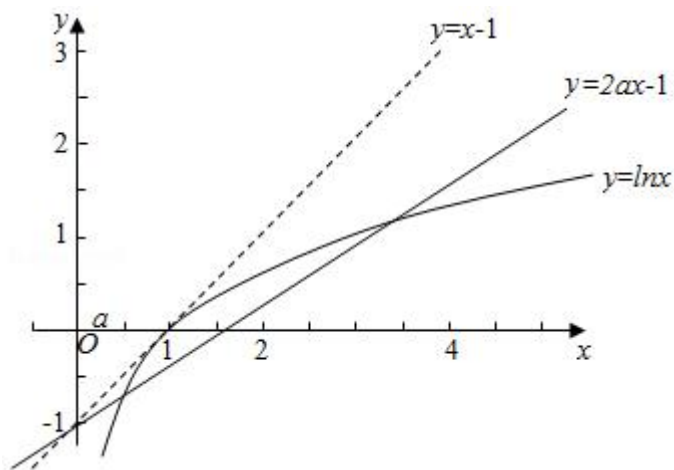
在同一个坐标系中作出它们的图象 (如图)

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 直线 $y = 2ax - 1$ 与 $y = \ln x$ 的图象相切,

由图可知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点.

则实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2})$.

故选: C.



8. 【解析】 \because 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - k(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x})$, $x \neq 0$,

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - k(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}) = \frac{(x-1)(xe^x - k)}{x^3},$$

$\because x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点

$\therefore x=1$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根.

$\therefore xe^x - k = 0$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 无变号零点,

令 $g(x) = xe^x - k$, $g'(x) = e^x(x+1)$,

令 $g'(x) > 0$, 解得: $x > -1$, 令 $g'(x) < 0$, 解得: $x < -1$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 递减, 在 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 递增,

$g(x)$ 的最小值为 $g(-1) = -\frac{1}{e} - k \geq 0$, 解得: $k \leq -\frac{1}{e}$,

又 $k=0$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

令 $f'(x) > 0$, 解得: $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得: $x < 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增,

$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点, 符合题意,

综上所述, $k \in (-\infty, -\frac{1}{e}] \cup \{0\}$.

故选: C.

9. 【解析】 $f'(x) = (x-1)e^x - kx + k$,

若 $x=1$ 是函数的极小值点,

则 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

即 $(x-1)(e^x - k) < 0$, $x < 1$,

即 $0 < k < e^x < e$

故答案为: $(0, e)$.

10. 【解析】 $f(x) = e^x(e^x - 4ax)$,

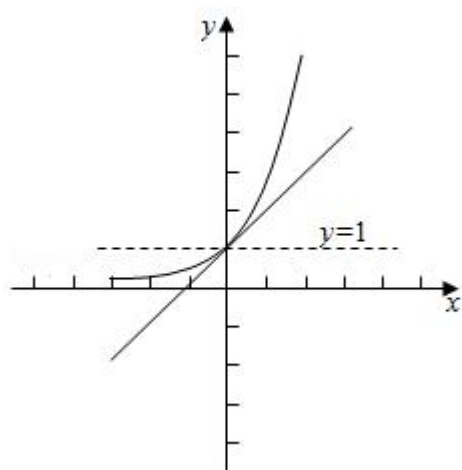
$f'(x) = 2e^x(e^x - 2ax - 2a)$,

若 $f(x)$ 存在 2 个极值点,

则方程 $e^x = 2a(x+1)$ 有 2 个根,

则函数 $y = e^x$ 和 $y = 2a(x+1)$ 的图象有 2 个交点,

画出函数 $y = e^x$ 和 $y = 2a(x+1)$ 的图象, 如图示:



若 $a < 0$, 显然 1 个交点, 不合题意,

若 $a > 0$, 设直线 $y = 2a(x+1)$ 和 $y = e^x$ 相切时切点是 (x_0, e^{x_0}) ,

则 $2a = e^{x_0}$,

则 $e^{x_0} = e^{x_0}x_0 + e^{x_0}$, 解得: $x_0 = 0$,

故切点是 $(0,1)$,

故 $2a > 1$, 解得: $a > \frac{1}{2}$,

故选: C.

11. 解: (1) $f'(x) = 2(x-1) + \frac{b}{x} = \frac{2x^2 - 2x + b}{x}$, 令 $f'(x) = 0$ 即 $2x^2 - 2x + b = 0$

$\therefore f(x)$ 有极值点 $\therefore 2x^2 - 2x + b = 0$ 有正的实数根, 设方程的根为 x_1, x_2

① 有两个极值点, 即 $x_1, x_2 > 0$, $\therefore \begin{cases} \Delta = 4 - 8b > 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{b}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < b < \frac{1}{2}$

② 有一个极值点, 即 $x_1 x_2 = \frac{b}{2} \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$

\therefore 综上所述: $b \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

(2) 思路: 利用第 (1) 问的结论根据极值点的个数进行分类讨论

方程 $2x^2 - 2x + b = 0$ 的两根为: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8b}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2b}$

① 当 $0 < b < \frac{1}{2}$ 时, $x_1 = 1 - \sqrt{1 - 2b}, x_2 = 1 + \sqrt{1 - 2b}$

$\therefore f(x)$ 的单调区间为:

x	$(0, 1 - \sqrt{1 - 2b})$	$(1 - \sqrt{1 - 2b}, 1 + \sqrt{1 - 2b})$	$(1 + \sqrt{1 - 2b}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

$\therefore f(x)$ 的极大值点为 $x = 1 - \sqrt{1 - 2b}$, 极小值点为 $x = 1 + \sqrt{1 - 2b}$

② 当 $b \leq 0$ 时, $x_1 = 1 - \sqrt{1 - 2b} < 0, x_2 = 1 + \sqrt{1 - 2b}$

$\therefore f(x)$ 的单调区间为:

x	$(0, 1 + \sqrt{1 - 2b})$	$(1 + \sqrt{1 - 2b}, +\infty)$
-----	--------------------------	--------------------------------

$f'(x)$	-	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow

$\therefore f(x)$ 的极小值点为 $x = 1 + \sqrt{1-2b}$ ，无极大值点

综上所述：

当 $0 < b < \frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 的极大值点为 $x = 1 - \sqrt{1-2b}$ ，极小值点为 $x = 1 + \sqrt{1-2b}$

当 $b \leq 0$ 时， $f(x)$ 的极小值点为 $x = 1 + \sqrt{1-2b}$ ，无极大值点

12. 【解析】由题意， $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\therefore f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x};$$

$\therefore f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，

$\therefore f'(x) = 0$ 有两个不同的正实根 x_1, x_2 ，

$\therefore 2x^2 - 2x + a = 0$ 的判别式 $\Delta = 4 - 8a > 0$ ，解得 $a < \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{2} > 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-2a}}{2},$$

$$\therefore 0 < x_1 < x_2, \quad \text{且 } x_1 + x_2 = 1$$

$$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \quad a = 2x_1 - 2x_1^2,$$

$$\therefore f(x_1) = x^2 - 2x_1 + (2x_1 - 2x_1^2) \ln x_1.$$

令 $g(t) = t^2 - 2t + (2t - 2t^2) \ln t$ ，其中 $0 < t < \frac{1}{2}$ ，

则 $g'(t) = 2(1-2t) \ln t$ 。

当 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $g'(t) < 0$ ，

$\therefore g(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数。

$$\therefore g(t) > g(\frac{1}{2}) = -\frac{3+2\ln 2}{4},$$

$$\text{故 } f(x_1) = g(x_1) > -\frac{3+2\ln 2}{4},$$

故选：D。

13. 【解析】 $f'(x) = 2(x-1) + \frac{t}{x} = \frac{2x^2 - 2x + t}{x}$, ($x > 0$),

令 $g(x) = 2x^2 - 2x + t$, 对称轴 $x = \frac{1}{2}$, 开口向上,

由 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个相异实根 $a, b (a < b)$,

则 $\frac{1}{2} < b < 1$, $2b^2 - 2b + t = 0$,

故 $t = -2b^2 + 2b$,

故 $f(b) = (b-1)^2 + t \ln b = b^2 - 2(b^2 - b) \ln b$,

故 $f'(b) = -2(2b-1) \ln b > 0$, ($\frac{1}{2} < b < 1$),

故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 递增,

故 $\frac{1-2\ln 2}{4} = f(\frac{1}{2}) < f(b) < f(1) = 0$,

故选: A.