

二次求导与隐零点专题参考答案

二次求导成功典例

1. 令 $F(x) = (x-1)f(x)$, 要证明 $F(x) \geq 0$, 只需证 $F(x)_{\min} \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{因 } F'(x) &= f(x) + (x-1)f'(x) = (x+1)\ln x - x + 1 + (x-1)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\ln x - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2, \end{aligned}$$

显然当 $x=1$ 时, $F'(x)=0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $x + \frac{1}{x} > 2, \ln x < 0, F'(x) < 0$, $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减;

当 $x > 1$ 时, $x + \frac{1}{x} > 2, \ln x > 0$,

$F'(x)$ 的符号仍不能判定, 求二阶导数得

$$[F'(x)]' = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ 从而 } F'(x) \text{ 在 } x > 1 \text{ 时递增,}$$

$F'(x) > F'(1) = 0$, $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增, 所以当 $x=1$ 时, $F(x)_{\min} = F(1) = 0$,

故 $F(x) \geq 0$ 成立, 原不等式成立.

2. 由题设 $x \geq 0, f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$,

若 $a < 0$, 则当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $ax+1 < 0, f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ 不恒成立;

若 $a \geq 0$, 则 $ax+1 > 0, f(x) \leq \frac{x}{ax+1} \Leftrightarrow (ax+1)(1-e^{-x}) - x \leq 0$.

令 $g(x) = (ax+1)(1-e^{-x}) - x$, 则 $g(0) = 0$, $g'(x) = e^{-x}(ax+1-a) + a-1, g'(0) = 0$,

$$[g'(x)]' = e^{-x}(2a-1-ax), \because x \geq 0,$$

\therefore 当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $2a-1 \leq 0$,

从而 $[g'(x)]' \leq 0$ (仅当 $x=0, a=\frac{1}{2}$ 时取 “=”),

$\therefore g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内递减, $g'(x) \leq g'(0) = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内递减, $g(x) \leq g(0) = 0$,

即原不等式成立.

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $2a-1 > 0$, 令 $[g'(x)]' = 0$ 得 $x = \frac{2a-1}{a}$,

从而当 $0 < x < \frac{2a-1}{a}$ 时, $[g'(x)]' > 0$,

此时 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{2a-1}{a})$ 内递增, $g'(x) > g'(0) = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{2a-1}{a})$ 内递增, $g(x) > g(0) = 0$, $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ 不恒成立.

综上所述, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

3. 构造一个新函数 $g(x) = e^x - x^2 + 2ax - 1$, $g'(x) = e^x - 2x + 2a$, 继续对 $g'(x)$ 求导得 $g''(x) = e^x - 2$

	$(0, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$g''(x)$	-	0	+
$g'(x)$	减	极小值	增

由上表可知 $g'(x) \geq g'(\ln 2)$, 而

$g'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2a = 2 - 2\ln 2 + 2a = 2(a - \ln 2 + 1)$, 由 $a > \ln 2 - 1$ 知

$g'(\ln 2) > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

于是有 $g(x) > g(0)$, 而 $g(0) = e^0 - 0^2 + 2a \times 0 - 1 = 0$,

故 $g(x) > 0$, 即当 $a > \ln 2 - 1$ 且 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2ax + 1$.

4. 解析: $f(x) \geq \frac{5}{2}x^2 + (a-3)x + 1 \Rightarrow e^x + 2x^2 - 3x \geq \frac{5}{2}x^2 + (a-3)x + 1$, 则

$a \leq \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x}$ 在 $x \geq \frac{1}{2}$ 上恒成立

令 $g(x) = \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-1) - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x^2}$

令 $h(x) = e^x(x-1) - \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $h'(x) = x(e^x - 1)$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 即 $h(x) \geq h(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{e} > 0$

所以 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{e} - \frac{9}{4}$

所以 $a \leq 2\sqrt{e} - \frac{9}{4}$

二次求导不成功典例 (隐零点)

1、解析: 由题意可得 $k < \frac{(x+1)[\ln(x+1)+1]}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内恒成立

令 $g(x) = \frac{(x+1)[\ln(x+1)+1]}{x}$, 则 $k < g(x)_{\min}$, 又 $g'(x) = \frac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$

令 $h(x) = x-1-\ln(x-1)$, 则 $h'(x) = \frac{x}{x+1} > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

而 $h(2) = 1 - \ln 3 < 0$, $h(3) = 2(1 - \ln 2) > 0$, 所以存在唯一的 $x_0 \in (2, 3)$ 使得 $h(x_0) = 0$

即 $x_0 - 1 = \ln(x_0 + 1)$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{(x_0+1)[\ln(x_0+1)+1]}{x_0} = x_0 + 1 \in (3, 4)$, 所以 $k \leq 3$, 即正整数 k 的最大值为 3.

点评: 整体代换, 化复杂的超越式为普通式; 其中需要注意隐零点 x_0 的范围需要尽量小, 因为 k 的取值范围取决于 x_0 的范围.

2.解析: $g(x) - f(x) = (x-1)e^x - \ln(x-1) - x - 1$, 令 $h(x) = (x-1)e^x - \ln(x-1) - x - 1$,

$$h'(x) = xe^x - \frac{x}{x-1} = x(e^x - \frac{1}{x-1}), \quad h''(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{(x-1)^2} > 0,$$

所以 $h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $h'(x)_{\min} > h'(1) \approx \lim_{x \rightarrow 1^+} h'(x) = -\infty$ (此时二阶导失效),

因为 $h'(1) < 0, h'(2) > 0$ 且 $h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调, 因此 $h'(x) = 0$ 在定义域内有且只有一个零

点设为 x_0 ,

当 $x > x_0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $1 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h(x_0) = (x_0 - 1)e^{x_0} - \ln(x_0 - 1) - x_0 - 1 \quad \text{①}$$

$$h'(x_0) = x_0 e^{x_0} - \frac{x_0}{x_0 - 1} = 0 \quad \text{②}$$

① ②联立可得 $h(x)_{\min} = 0$,

所以 $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$.

3. 依题可知 $f(1)=0$, 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的零点 x_0 , 由 (1) 可知 $a > 2$,

$$\text{且 } x_0 = x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{于是: } \ln x_0 + a(x_0 - 1)^2 = 0 \text{ ①}$$

$$2ax_0^2 - 2ax_0 + 1 = 0 \text{ ② (导函数的临界点)}$$

$$\text{由①②得 } \ln x_0 - \frac{x_0 - 1}{2x_0} = 0, \text{ 设 } g(x) = \ln x - \frac{x-1}{2x}, (x \in (0,1)),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{2x-1}{2x^2}, \text{ 因此 } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{又 } g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 4}{2} > 0, \quad g(e^{-1}) = \frac{e^{-1} - 3}{2} < 0$$

根据零点存在定理, 故 $e^{-\frac{3}{2}} < x_0 < e^{-1}$.

4、解析: 原问题等价于 $ax + \ln x + 1 \leq xe^{2x} (x > 0)$,

$$\text{即 } a \leq e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} = g(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{2x^2 e^{2x} + \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } h(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x, \quad h'(x) = 4xe^{2x} + 4x^2 e^{2x} + \frac{1}{x} > 0,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 且 } h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{e}}{8} - 2\ln 2 < 0, \quad h(1) = 2e^2 > 0$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上存在唯一的零点 } x_0, \text{ 且 } x_0 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0},$$

$$\text{同时有 } h(x_0) = 0, \text{ 即 } 2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0, \text{ 即 } e^{2x_0} = -\frac{\ln x_0}{2x_0^2},$$

$$\therefore 2x_0 = \ln(-\ln x_0) - \ln 2x_0 - \ln x_0, \text{ 即 } \ln 2x_0 + 2x_0 = \ln(-\ln x_0) + (-\ln x_0),$$

$$\text{设 } m(x) = \ln x + x, \text{ 则 } m'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \therefore m(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以 } 2x_0 = -\ln x_0, \text{ 也即 } e^{2x_0} = \frac{1}{x_0},$$

$$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{-2x_0 + 1}{x_0} = 2, \therefore a \leq 2,$$

即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

点拨: 本题采用分参的方法求参数 a 的取值范围, 问题转化为求 $g(x)$ 的最小值; 另一方面,

$g(x)$ 的最小值在 $g'(x)$ 的零点 x_0 处取得, 所以问题转化为求 $g(x)_{\min}$, 即 $g(x_0)$ 的值, 而 $g(x_0)$ 的表达式很复杂, 这时就需要用到隐零点 x_0 的关系式来处理, 即式子 $2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0$ 的处理, 此处实际是进行了一个同构处理, 十分巧妙; 同构的形式当然也可以这样:

$2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}}$. 再构造 $n(x) = xe^x$, 易知 $n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以有

$$2x_0 = \ln \frac{1}{x_0}.$$

5、解析: $f'(x) = 2(e^x - x - a)$, $f''(x) = 2(e^x - 1) \geq 0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 且 $f'(0) = 2(1 - a)$,

①当 $a \leq 1$ 时, $f'(x) \geq f'(0) = 2(1 - a) \geq 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(0) = 2 - a^2$,

要使 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $f(0) = 2 - a^2 \geq 0$, 解得 $a \in [-\sqrt{2}, 1]$,

②当 $a > 1$ 时, 则 $f'(0) < 0$, 又 $f'(a) = 2(e^a - 2a) \geq 2(ea - 2a) > 0$,

故存在 $x_0 \in (0, a)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $a = e^{x_0} - x_0$,

且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减; 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(x_0) = 2e^{x_0} - (x_0 + a)^2 = 2e^{x_0} - e^{2x_0} = e^{x_0}(2 - e^{x_0}) \geq 0$,

解得 $e^{x_0} \leq 2$, $x_0 \in (0, \ln 2]$.

而 $a = e^{x_0} - x_0 = g(x_0)$, 则易知 $g(x_0)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $a \in (1, 2 - \ln 2]$.

综上: a 的取值范围是 $[-\sqrt{2}, 2 - \ln 2]$.

点评: 代换消参.