

数列中的放缩专项靶题

常见的放缩变形：

$$(1) \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)},$$

$$(2) 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$(3) \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m} (b > a > 0, m > 0), \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m} (a > b > 0, m > 0)$$

$$(6) \frac{k^n}{(k^n-1)^2} = \frac{k^n}{(k^n-1)(k^n-1)} < \frac{k^n}{(k^n-1)(k^n-k)} = \frac{k^{n-1}}{(k^n-1)(k^{n-1}-1)} \\ = \frac{1}{k^{n-1}-1} - \frac{1}{k^n-1} (n \geq 2, k \geq 2, k, n \in N^*)$$

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $4S_n = (2n-1)a_{n+1} + 1$ ，且 $a_1 = 1$

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{S_n}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $T_n < \frac{3}{2}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 a_n, n \in N_+$

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 是等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $c_n = \frac{n}{a_n}$ ，求证： $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{17}{24}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = na_n - 3n(n-1), n \in N^*$ ，且 $a_3 = 17$

(1) 求 a_1

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，且满足 $b_n = \sqrt{\frac{n}{S_n}}$ ，求证： $T_n < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}, a_n = \frac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1} - 2} (n \geq 2, n \in N)$

(1) 试判断数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} + (-1)^n \right\}$ 是否为等比数列，并说明理由

(2) 设 $b_n = a_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证：对任意的 $n \in N^*$, $T_n < \frac{4}{7}$

5: 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n, n \in N^*$, 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $b_1 \neq 0$,

$$2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n, n \in N^*$$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式

(2) 求证: 对任意的 $n \in N^*$ 且 $n \geq 2$, 有 $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$