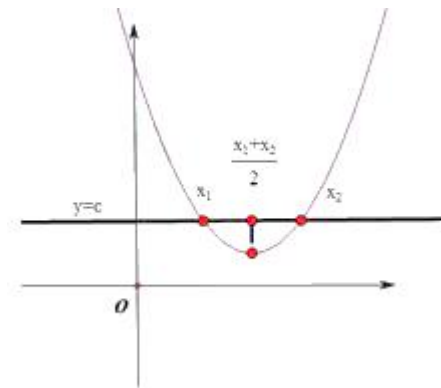


## 极值点偏移专项靶题（自变量不等式）

知识延拓必知：

### 一、极值点偏移的含义

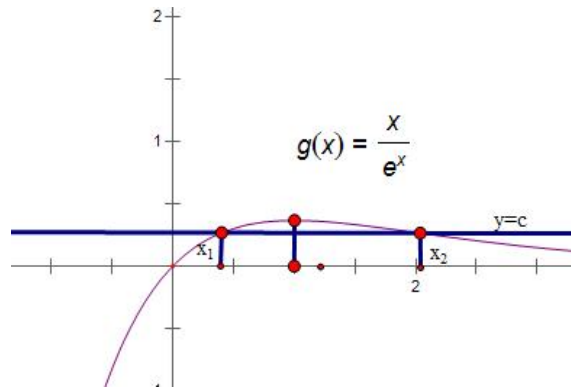
众所周知，函数  $f(x)$  满足定义域内任意自变量  $x$  都有  $f(x) = f(2m - x)$ ，则函数  $f(x)$  关于直线  $x = m$  对称；可以理解为函数  $f(x)$  在对称轴两侧，函数值变化快慢相同，且若  $f(x)$  为单峰函数，则  $x = m$  必为  $f(x)$  的极值点。如二次函数  $f(x)$  的顶点就是极值点  $x_0$ ，若  $f(x) = c$  的两根的中点为  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ，则刚好有  $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$ ，即极值点在两根的正中间，也就是极值点没有偏移。



若相等变为不等，则为极值点偏移：若单峰函数  $f(x)$  的极值点为  $m$ ，且函数  $f(x)$  满足定义域内  $x = m$  左侧的任意自变量  $x$  都有  $f(x) > f(2m - x)$  或  $f(x) < f(2m - x)$ ，则函数  $f(x)$  极值点  $m$  左右侧变化快慢不同。故单峰函数  $f(x)$  定义域内任意不同的实数  $x_1, x_2$  满足  $f(x_1) = f(x_2)$ ，则  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  与极值点  $m$  必有确定的大小关系：

若  $m < \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，则称为极值点左偏；若  $m > \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，则称为极值点右偏。

如函数  $g(x) = \frac{x}{e^x}$  的极值点  $x_0 = 1$  刚好在方程  $g(x) = c$  的两根中点  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  的左边，我们称之为极值点左偏。



可以选用的答题模板：若已知函数  $f(x)$  满足  $f(x_1) = f(x_2)$ ， $x_0$  为函数  $f(x)$  的极值点，

求证： $x_1 + x_2 < 2x_0$ 。

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性并求出  $f(x)$  的极值点；

假设此处  $f(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减，在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增。

(2) 构造  $F(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$ ；

注：此处根据题意需要还可以构造成  $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$  的形式。

(3) 通过求导  $F'(x)$  讨论  $F(x)$  的单调性，判断出  $F(x)$  在某段区间上的正负，并得出

$f(x_0 + x)$  与  $f(x_0 - x)$  的大小关系；

假设此处  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，那么我们便可得出

$F(x) > F(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$ ，从而得到： $x > x_0$  时， $f(x_0 + x) > f(x_0 - x)$ 。

(4) 不妨设  $x_1 < x_0 < x_2$ ，通过  $f(x)$  的单调性， $f(x_1) = f(x_2)$ ， $f(x_0 + x)$  与  $f(x_0 - x)$  的大小关系得出结论；

接上述情况，由于  $x > x_0$  时， $f(x_0 + x) > f(x_0 - x)$  且  $x_1 < x_0 < x_2$ ， $f(x_1) = f(x_2)$ ，故

$f(x_1) = f(x_2) = f[x_0 + (x_2 - x_0)] > f[x_0 - (x_2 - x_0)] = f(2x_0 - x_2)$ ，又因为  $x_1 < x_0$ ，

$2x_0 - x_2 < x_0$  且  $f(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减，从而得到  $x_1 < 2x_0 - x_2$ ，从而  $x_1 + x_2 < 2x_0$  得

证。

(5) 若要证明  $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ ，还需进一步讨论  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  与  $x_0$  的大小，得出  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  所在

的单调区间，从而得出该处函数导数值的正负，从而结论得证。

此处只需继续证明：因为  $x_1 + x_2 < 2x_0$ ，故  $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$ ，由于  $f(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减，

故  $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ 。

【说明】

（1）此类试题由于思路固定，所以通常情况下求导比较复杂，计算时须细心；

（2）此类题目若试题难度较低，会分解为三问，前两问分别求  $f(x)$  的单调性、极值点，

证明  $f(x_0 + x)$  与  $f(x_0 - x)$ （或  $f(x)$  与  $f(2x_0 - x)$ ）的大小关系；若试题难度较大，则直

接给出形如  $x_1 + x_2 < 2x_0$  或  $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$  的结论，让你给予证明，此时自己应主动把该

小问分解为三问逐步解题。

专项靶题（只选取了相关的其中一问，一般题目整体各部有相关性）

1. 已知函数  $f(x) = e^{x+1} - kx - 2k$ （其中  $e$  是自然对数的底数， $k \in \mathbb{R}$ ）.

当函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$  时，证明：  $x_1 + x_2 > -2$  .

2. 已知函数  $f(x) = \ln x - ax$  有两个零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ )，求证：  $x_1 x_2 > e^2$  .

3. 已知函数  $f(x) = x - a \ln x - 1$ （ $a$  为常数）与  $x$  轴有唯一的交点  $A$  .

曲线  $y = f(x)$  在点  $A$  处的切线斜率为  $a^2 - a - 3$ ，若存在不相等的正实数  $x_1, x_2$ ，满足

$|f(x_1)| = |f(x_2)|$ ，证明：  $x_1 x_2 < 1$  .

4. 设函数  $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$  . 若方程  $f(x) = c$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$ ，

求证：  $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0$  .

5. 函数  $f(x) = x^2 - 2x + 1 + ae^x$  有两极值点  $x_1, x_2$ ，且  $x_1 < x_2$  . 证明：  $x_1 + x_2 > 4$  .

6. 已知函数  $f(x) = x e^{-x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

(1) 若  $x \in (0, 1)$ ，求证：  $f(2-x) > f(x)$ ;

(2) 若  $x_1 \in (0, 1)$ ,  $x_2 \in (1, +\infty)$ ，且  $f(x_1) = f(x_2)$ ，求证：  $x_1 + x_2 > 2$  .