

导数在切线方面运用专题参考答案:

类型一: 斜率(或倾斜角)与切点处导数关系

1.[答案] A

2.【解析】由题意得 $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \geq -1$

过曲线 C 上任意一点切线斜率的取值范围是 $[-1, +\infty)$

类型二: 在某点处求切线方程

1.【解析】令 $x > 0$, 则 $-x < 0$, $f(-x) = \ln x - 3x$, 又 $f(-x) = f(x)$,

$\therefore f(x) = \ln x - 3x (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 3 (x > 0)$, $\therefore f'(1) = -2$,

\therefore 在点 $(1, -3)$ 处的切线方程为 $y + 3 = -2(x - 1)$, 即 $y = -2x - 1$.

2.【解析】由 $f(x) = 2f(2-x) - x^2 + 8x - 8$ 得

$$f(2-x) = 2f(x) - (2-x)^2 + 8(2-x) - 8,$$

$$\text{即 } 2f(x) - f(2-x) = x^2 + 4x - 4,$$

$$\therefore f(x) = x^2, \therefore f'(x) = 2x,$$

\therefore 切线方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 1 = 0$ 选 A.

[答案] A

类型三: 过某点处求切线方程

1.【解析】设切点为 $P(x_0, 2x_0 - x_0^3)$, 则斜率 $k = f'(x_0) = 2 - 3x_0^2$, 过切点的切线方程为:

$$y - 2x_0 + x_0^3 = (2 - 3x_0^2)(x - x_0), \therefore \text{过点 } A(1, 1), \therefore 1 - 2x_0 + x_0^3 = (2 - 3x_0^2)(1 - x_0)$$

解得: $x_0 = 1$ 或 $x_0 = -\frac{1}{2}$, 当 $x_0 = 1$ 时, 切点为 $(1, 1)$, 切线方程为: $x + y - 2 = 0$

当 $x_0 = -\frac{1}{2}$ 时, 切点为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{8})$, 切线方程为: $5x - 4y - 1 = 0$

2【解析】点 $p(-4, 0)$ 不为切点, 可设出切点 $M(m, n)$, 则 $n = me^m$, ①

又 $y' = e^x + xe^x$, 则切线斜率为 $k = (1+m)e^m = \frac{n}{m+4}$, ②

由①②得, $m = -2, n = -2e^{-2}, k = -e^{-2}$, 故切线方程为 $y - 0 = -e^{-2}(x + 4)$,

即 $x + e^2y + 4 = 0$, 故答案为 $x + e^2y + 4 = 0$.

$$3. \text{【解析】设切点为}(x_0, y_0), y' = \frac{1}{x+a}, \text{ 所以有} \begin{cases} y_0 = x_0 + 1, \\ \frac{1}{x_0 + a} = 1, \\ y_0 = \ln(x_0 + a), \end{cases} \text{ 解得} \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 0, \\ a = 2. \end{cases}$$

4. 【解析】直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$, $y=\ln(x+1)$ 均相切, 设切点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $y=\ln x+2$ 得 $y'=\frac{1}{x}$, 由 $y=\ln(x+1)$ 得 $y'=\frac{1}{x+1}$, $\therefore k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1}$, $\therefore x_1=\frac{1}{k}$, $x_2=\frac{1}{k}-1$, $\therefore y_1=-\ln k+2$, $y_2=-\ln k$, 即 $A\left(\frac{1}{k}, -\ln k+2\right)$, $B\left(\frac{1}{k}-1, -\ln k\right)$, $\therefore A, B$ 在直线 $y=kx+b$ 上,

$$\therefore \begin{cases} 2-\ln k = k \cdot \frac{1}{k} + b, \\ -\ln k = k \cdot \left(\frac{1}{k}-1\right) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - \ln 2, \\ k = 2. \end{cases}$$

类型四：导数切线运用

1. 【解析】 P 到直线 $y=x-2$ 的距离等价于作直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=x^2-\ln x$ 相交, 从而转化为两条平行线之间的距离, 当直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=x^2-\ln x$ 相切时, 距离最大. 此时, $k=f'(x_0)=2x_0-\frac{1}{x_0}=1(x_0>0)$, 解得: $x_0=1$, $y_0=1$, 此时 P 到直线 $y=x-2$ 的距

$$\text{离为} \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

2. 【解题指南】求出与直线 $x+2y-4=0$ 平行的抛物线的切线, 对应切点即为所求点 P .

【解析】由 $y^2=2x$ 及直线 $x+2y-4=0$ 的位置关系可知, 点 P 应位于直线 $x+2y-4=0$ 的下方.

$$\text{故令 } y = -\sqrt{2x},$$

$$\text{所以 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{2(x+\Delta x)} + \sqrt{2x}}{\Delta x} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}},$$

设切点为 (x_0, y_0) , 过切点 (x_0, y_0) 的切线与直线 $x+2y-4=0$ 平行,

$$\text{所以 } y' \Big|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } x_0=2,$$

$$\text{所以切点坐标为 } (2, -2),$$

此时该点为抛物线的曲线 AOB 上与线段 AB 的距离最远的点,

故点 $P(2, -2)$ 即为所求.

所以在抛物线的曲线 AOB 上存在点 P(2, -2), 使△ABP 的面积最大.

类型五: 导数在切线方面综合运用参考答案:

1. 【解析】由题意得, $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + ax - 1$ 的导数为 $f'(x) = 2x^2 - 2x + a$, 由题意

可得 $2x^2 - 2x + a = 3$, 即 $2x^2 - 2x + a - 3 = 0$ 有两个不等的正根, 则 $\Delta = 4 - 8(a - 3) > 0$,

$$x_1 + x_2 = 10, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2}(a - 3) > 0, \quad \text{解得 } 3 < a < \frac{7}{2}.$$

2 【解析】设切点为 (x_0, y_0) , $f'(x) = \ln x + 1$, 所以切线方程为: $y - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(x - x_0)$, 代入 $A(m, m)$, 得 $m - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(m - x_0)$, 即这

个关于 x_0 的方程有两个解. 化简方程为 $m \ln x_0 = x_0$, 即 $\frac{1}{m} = \frac{\ln x_0}{x_0}$, 令

$g(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递

减, $g(e) = \frac{1}{e}$, $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow 0$, $g(1) = 0$, 所以 $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{e}$, 所以 $m > e$. 选 B.

3 【解析】 $\because y' = \frac{1}{x+b} = 1$, $\therefore x = 1 - b$, 切点为 $(1 - b, 0)$,

代入 $y = x - a$, 得 $a + b = 1$, $\because a, b$ 为正实数, $\therefore a \in (0, 1)$,

$$\text{则 } \frac{a^2}{2+b} = \frac{a^2}{3-a}, \text{ 令 } g(a) = \frac{a^2}{3-a}, \text{ 则 } g'(a) = \frac{a(6-a)}{(3-a)^2} > 0,$$

则函数 $g(a)$ 为增函数, $\therefore \frac{a^2}{2+b} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4. 【解析】设切点 $P(x, \ln x_0)$, 则 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, 所以方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

$$\text{即 } y = \frac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1, \text{ 所以 } k = \frac{1}{x_0}, b = \ln x_0 - 1, \quad g(x_0) = k + b = \frac{1}{x_0} + \ln x_0 - 1 (x_0 > 0),$$

可得 $g(x_0)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 所以当 $x_0 = 1$ 时, $k + b$ 取得最小值 0.

5. 【解析】临界情况为 $y = 2(x + a)$ 与 $y = e^x$ 相切的情况,

$$y' = e^x = 2, \text{ 则 } x = \ln 2,$$

所以切点坐标为 $(\ln 2, 2)$,

则此时 $a = 1 - \ln 2$, 所以只要 $y = 2|x + a|$ 图象向左移动, 都会产生 3 个交点, 所以

$a > 1 - \ln 2$, 即 $(1 - \ln 2, +\infty)$.

6. 【解析】函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ ，则 $f'(x) = \ln x - ax + x\left(\frac{1}{x} - a\right) = \ln x - 2ax + 1$ ，

令 $f'(x) = \ln x - 2ax + 1 = 0$ 得 $\ln x = 2ax - 1$ ，

函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点，

等价于 $f'(x) = \ln x - 2ax + 1$ 有两个零点，

等价于函数 $y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点，在同一坐标系中作出它们的图象，当

$a = \frac{1}{2}$ 时，直线 $y = 2ax - 1$ 与 $y = \ln x$ 的图象相切，

由图可知，当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时， $y = \ln x$ 与 $y = 2ax - 1$ 的图象有两个交点，

则实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，故选 B.

导数在函数极值方面运用专题参考答案：

7、答案：B

解析：设公切线与曲线 C_1 切于点 (x_1, x_1^2) ，与曲线 C_2 切于点 (x_2, ae^{x_2}) ，由 $\begin{cases} y' = 2x \\ y' = ae^x \end{cases}$ 可得：

$$2x_1 = ae^{x_2} = \frac{ae^{x_2} - x_1^2}{x_2 - x_1}, \text{ 所以有 } \begin{cases} 2x_1 = \frac{2x_1 - x_1^2}{x_2 - x_1} \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 2 \\ 2x_1 = ae^{x_2} \end{cases}, \text{ 所以 } ae^{x_2} = 4x_2 - 4,$$

即 $a = \frac{4(x_2 - 1)}{e^{x_2}}$ ，设 $f(x) = \frac{4(x-1)}{e^x}$ ，则 $f'(x) = \frac{4(2-x)}{e^x}$ 。可知 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递

增，在 $(2, +\infty)$ 单调递减，所以 $a_{\max} = f(2) = \frac{4}{e^2}$