

多元变量专项参考答案:

1. 【解析】 $\because x^2 + y^2 + z^2 = 1, \therefore 1 - z^2 = x^2 + y^2 \geq 2xy$ (当且仅当 $x = y$ 时取等号)

$$\therefore 1 - z^2 \geq 2xy, \therefore \frac{1 - z^2}{xy} \geq 2$$

又因为已知正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 所以 $0 < z < 1$ 即 $\frac{1+z}{xy} \geq \frac{2}{1-z}$

$$\text{故 } S = \frac{1+z}{xy} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{1-z} + \frac{1}{z} = \left(\frac{2}{1-z} + \frac{1}{z} \right) (1-z+z) = 3 + \frac{2z}{1-z} + \frac{1-z}{z} \geq 3 + 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $z = \sqrt{2} - 1$ 时等号成立,

$$\text{故 } S = \frac{1+z}{xy} + \frac{1}{z} \text{ 的最小值是 } 3 + 2\sqrt{2}$$

2. 【解析】因为 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = c^2 + d^2 = 2$, 所以 $cd \leq \frac{c^2 + d^2}{2} = 1$, 即 $\frac{1}{cd} \geq 1$, 当且仅当 $c = d = 1$ 时取等号,

所以 $a + \frac{b}{cd}$ 的最小值为 $a + b$ 的最小值, 所以

$$\frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \right) \geq \frac{1}{2} \left(3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{b}{a} = \frac{2a}{b} \end{cases} \text{ 时取等号, 所以}$$

$$a + \frac{b}{cd} \text{ 的最小值为 } \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

故选: D

3. 【解析】依题意, $a = 9 - b - c$, 代入 $ab + bc + ca = 24$ 得 $(9 - b - c)b + bc + c(9 - b - c) = 24$;

整理得 $c^2 + (b - 9)c + b^2 - 9b + 24 = 0$ 在实数范围内有解, 即

$$\Delta = (b - 9)^2 - 4(b^2 - 9b + 24) = -3b^2 + 18b + 15 \geq 0, \text{ 解得 } 1 \leq b \leq 5.$$

4. 【解析】因为 $a + b + c = 0$, 所以 $c = -a - b$

所以由 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 可得 $a^2 + b^2 + (-a - b)^2 = 2$, 即 $b^2 + ab + a^2 - 1 = 0$

把此方程看成关于 b 的一元二次方程, 说明此方程有根

$$\text{所以 } \Delta = a^2 - 4(a^2 - 1) \geq 0, \text{ 解得 } -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq a \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{故答案为: } \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$$

5. 【解析】 $\because a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

$$\therefore a + b = 1 - c, ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)] = c^2 - c,$$

$$\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\therefore c^2 - c \leq \frac{(1-c)^2}{4},$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq c \leq 1, \therefore 0 \leq 1-c \leq \frac{4}{3},$$

$$\therefore 0 \leq a+b \leq \frac{4}{3},$$

故选：C.

6 【解析】由 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$ 可得 $a+b=1-c$, $a^2+b^2=1-c^2$,

$$\text{由 } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ 可得 } ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

$$\text{所以 } ab = \frac{(1-c)^2 - (1-c^2)}{2} = c^2 - c,$$

$$\text{由 } (a+b)^2 \geq 4ab \text{ 可得 } (1-c)^2 \geq 4(c^2 - c)$$

$$\text{即 } 3c^2 - 2c - 1 \leq 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{3} \leq c \leq 1,$$

$$\text{所以 } a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 = (1-c)(1-c^2 - c^2 + c) + c$$

$$= (1-c)(-2c^2 + c + 1) + c^3 = 3c^3 - 3c^2 + 1,$$

$$\text{令 } f(c) = 3c^3 - 3c^2 + 1, \left(-\frac{1}{3} \leq c \leq 1\right)$$

$$f'(c) = 9c^2 - 6c = 3c(3c - 2),$$

$$\text{由 } f'(c) < 0 \text{ 可得 } 0 < c < \frac{2}{3},$$

$$\text{由 } f'(c) > 0 \text{ 可得 } -\frac{1}{3} < c < 0 \text{ 或 } \frac{2}{3} < c < 1,$$

$$f(0) = 1, f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{9},$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{5}{9}, f(1) = 3 - 3 + 1 = 1,$$

所以 $f(c) = 3c^3 - 3c^2 + 1$ 的最小值为 $\frac{5}{9}$, 即 $a^3 + b^3 + c^3$ 的最小值为 $\frac{5}{9}$.

故选：B.

7. 【解析】由题 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a \neq b \neq c$

$$\text{得 } 1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = 3 + (2ab+2bc+2ac),$$

$$\text{得 } ab+bc+ac = -1,$$

$$\text{所以 } -1 = ab+c(b+a) = ab+c(1-c),$$

$$\text{则 } ab = c^2 - c - 1,$$

$$\text{又 } a+b = 1-c,$$

所以由韦达定理得 a 和 b 为关于 x 的方程 $x^2 + (c-1)x + c^2 - c - 1 = 0$ 的两不等根,

$$\text{所以 } \Delta = (c-1)^2 - 4(c^2 - c - 1) > 0 \Rightarrow 3c^2 - 2c - 5 < 0,$$

$$\text{得 } -1 < c < \frac{5}{3},$$

$$\text{再由 } ab = c^2 - c - 1, \text{ 所以 } abc = c^3 - c^2 - c,$$

$$\text{构造函数 } f(x) = x^3 - x^2 - x,$$

$$\text{则 } f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1),$$

$$f'(x) = 0 \text{ 得 } x = 1 \text{ 或 } x = -\frac{1}{3},$$

所以在 $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

在 $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{27}, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{5}{3} = \frac{5}{27},$$

$$f(1) = -1, f(-1) = -1,$$

所以 $f(x) = x^3 - x^2 - x$ 在 $-1 < c < \frac{5}{3}$ 上范围为 $\left(-1, \frac{5}{27}\right)$,

所以 abc 的取值范围为 $\left(-1, \frac{5}{27}\right)$.

故答案为: $\left(-1, \frac{5}{27}\right)$

8 【解析】因为 $(a+b+c)^2 \geq 0$, 即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \geq 0$, 又 $a^2+b^2+c^2=1$,

$$\text{所以 } ab+ac+bc \geq -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = -\frac{1}{2};$$

$$\text{因为 } 2ab \leq a^2+b^2, \quad 2ac \leq a^2+c^2, \quad 2bc \leq b^2+c^2,$$

所以 $2ab+2ac+2bc \leq 2a^2+2b^2+2c^2$ ，即 $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2=1$ ，当且仅当

$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=b=c=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号.

综上， $ab+bc+ca$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

故选：C.

9. 【解析】由 $b^2=ac$ 得 $c=\frac{b^2}{a}$ ，则 $5b \geq 2\left(a+\frac{b^2}{a}\right), a>0$,

所以 $\frac{5b}{a} \geq 2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$ ，即 $2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 5\cdot\frac{b}{a} + 2 \leq 0$ ，解得， $\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a} \leq 2$.

令 $1+\frac{b}{a}=x$ ， $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ ，

$$\frac{5a+8b+4c}{a+b} = \frac{5a+8b+\frac{4b^2}{a}}{a+b} = \frac{5+\frac{8b}{a}+\frac{4b^2}{a^2}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{5+8(x-1)+4(x-1)^2}{x} = \frac{4x^2+1}{x} = 4x+\frac{1}{x},$$

因为函数 $y=4x+\frac{1}{x}$ 在 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上单调递增，所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时 $\frac{5a+8b+4c}{a+b}$ 取得最小值

$m=4 \times \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ ，当 $x=3$ 时取得最大值 $M=12+\frac{1}{3}=\frac{37}{3}$ ，

所以 $M+m=\frac{37}{3}+\frac{20}{3}=19$.

故选 D.

10. 【解析】因为 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$ ，

所以 $2ab+2ac+2bc=12-a^2-2bc$.

而 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=12+b^2+c^2-2bc=12+(b-c)^2 \geq 12$ ，且 $a, b, c > 0$

所以 $a+b+c \geq 2\sqrt{3}$ ，当且仅当 $b=c$ 时等号成立.

11. 【解析】转化条件为原式 $=\frac{1}{ab}+ab+\frac{1}{a(a-b)}+a(a-b)+(a-5c)^2$ ，结合基本不等式即可得

$$\begin{aligned} & \text{解. } 2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2 \\ &= \frac{1}{ab} + ab + \frac{1}{a(a-b)} + a(a-b) - ab - a(a-b) + 2a^2 - 10ac + 25c^2 \\ &= \frac{1}{ab} + ab + \frac{1}{a(a-b)} + a(a-b) + a^2 - 10ac + 25c^2 \\ &= \frac{1}{ab} + ab + \frac{1}{a(a-b)} + a(a-b) + (a-5c)^2 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab} \cdot ab} + 2\sqrt{\frac{1}{a(a-b)} \cdot a(a-b)} + 0 = 4,$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} ab=1 \\ a(a-b)=1, \text{ 即 } a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=\frac{\sqrt{2}}{5} \text{ 时, 等号成立.} \\ a=5c \end{cases}$$

故选: A.

12. 【解析】因为 x, y, z 均为正数, 所以 $x^2 + y^2 \geq 2xy, z^2 + y^2 \geq 2yz$,

$$\text{所以 } \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+z^2} = \frac{xy+yz}{x^2+y^2+y^2+z^2} \leq \frac{xy+yz}{2xy+2yz} = \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } x=y=z \text{ 时等号成立.}$$

故选: C

13 【解析】因为 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, 所以 $3x^2 + 2y^2 = 1 - z^2 = (1-z)(1+z)$;

$$\text{易知 } z < 1, \text{ 所以 } 1+z = \frac{3x^2+2y^2}{1-z};$$

$$\text{所以 } s = \frac{1+z}{xyz} = \frac{3x^2+2y^2}{xyz(1-z)}, \text{ 由 } z(1-z) \leq \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } z = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{可得 } s \geq \frac{4(3x^2+2y^2)}{xy} \geq \frac{8\sqrt{6}xy}{xy} = 8\sqrt{6}, \text{ 当且仅当 } 3x^2 = 2y^2 = \frac{3}{8}, \text{ 即 } x = \frac{\sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ 时, 取到}$$

最小值.

故答案为: $8\sqrt{6}$.

14. 【解析】因为 $2ab = a \cdot 2b \leq \frac{a^2 + 4b^2}{2}$, 当且仅当 $a = 2b$ 时取到等号,

$$\text{所以 } 2ab + 3c \leq \frac{5-2c^2}{2} + 3c = -\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4},$$

$$\text{由 } 2c^2 \leq 5 \text{ 可知 } c = \frac{3}{2} \text{ 可以取到等号, 故 } 2ab + 3c \leq \frac{19}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{19}{4}.$$

15. 【解析】先分离出 $a^2 + b^2$, 应用基本不等式转化为关于 c 的二次函数, 进而求出最小值.

若 $ab + c$ 取最小值, 则 ab 异号, $c < 0$,

$$\text{根据题意得: } 1 - 2c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{又由 } a^2 + b^2 \geq 2|ab| = -2ab, \text{ 即有 } 1 - 2c^2 \geq -2ab,$$

$$\text{则 } ab+c \geq c^2+c-\frac{1}{2}=\left(c+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16},$$

$$\text{即 } 2ab+c \text{ 的最小值为 } -\frac{9}{16},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{9}{16}$$

16. 【解析】由柯西不等式得 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})(2b^2+3c^2+6d^2) \geq (b+c+d)^2$ ，即

$2b^2+3c^2+6d^2 \geq (b+c+d)^2$ ，将条件代入，我们就可以求出 a 的取值范围。由柯西不等式得

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})(2b^2+3c^2+6d^2) \geq (b+c+d)^2$$

$$\text{即 } 2b^2+3c^2+6d^2 \geq (b+c+d)^2$$

将条件代入可得 $5-a^2 \geq (3-a)^2$ ，解得 $1 \leq a \leq 2$

$$\text{当且仅当 } \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{6}d}{\sqrt{\frac{1}{6}}} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{可知 } b=1, c=\frac{1}{3}, d=\frac{1}{6} \text{ 时 } a_{\max}=2,$$

$$b=1, c=\frac{2}{3}, d=\frac{1}{3} \text{ 时, } a_{\min}=1.$$

故答案为：2；1.

17. 【解析】由基本不等式有 $c = a^2 + 4b^2 - ab \geq 3ab$ ，因 $ab > 0$ ，故 $\frac{c}{ab} \geq 3$ ，

当且仅当 $a = 2b$ 时等号成立，故 $\frac{c}{ab}$ 有最小值 3，

$$\text{此时 } c = 6b^2, a = 2b, \text{ 故 } a+b-c = -6b^2+3b = -6\left(b-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8},$$

$$\text{故当 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{3}{8} \text{ 时, } a+b-c \text{ 有最大值为 } \frac{3}{8}, \text{ 故填 } \frac{3}{8}.$$

18. 【解析】①对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ， $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$

$$=|x-1|+|-x|+|1-y|+|y+1| \geq |x-1-x|+|1-y+y+1|=3,$$

当且仅当 $x \in [0,1], y \in [-1,1]$ 成立，

$\therefore |x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3；

② \because 正实数 x, y, z 满足 $x^2+2y^2+z^2=1$ ，

$$\therefore 1 = x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}z^2$$

$$\geq 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}xy + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}yz + 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6}xz,$$

当且仅当 $x = \sqrt{2}y = \frac{\sqrt{6}}{2}z$ 时，等号成立，

$$\therefore (2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}xy + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}yz + 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6}xz) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \leq 1 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}\sqrt{3}xy + \sqrt{2}yz + xz \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故答案为：3, $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

19 【解析】根据 $a+b=1$ 和“1”的代换，利用不等式化简 $\frac{a^2+1}{ab}$ ，代入 $\left(\frac{a^2+1}{ab}-2\right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c-1}$ 化

简后，利用添补项和基本不等式求出式子的最小值，并求出等号成立时 a 、 b 、 c 的值。因为

$$a > 0, b > 0, a+b=1,$$

$$\text{所以 } \frac{a^2+1}{ab} = \frac{a^2+(a+b)^2}{ab} = \frac{2a^2+b^2+2ab}{ab} \geq \frac{2\sqrt{2}ab+2ab}{ab} = 2\sqrt{2}+2,$$

$$\text{又 } c > 1, \text{ 则 } \left(\frac{a^2+1}{ab}-2\right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c-1} \geq 2\sqrt{2}c + \frac{\sqrt{2}}{c-1}$$

$$= \sqrt{2} \left[2(c-1) + \frac{1}{c-1} + 2 \right] \geq \sqrt{2} \left[2\sqrt{2(c-1) \cdot \frac{1}{c-1}} + 2 \right] = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$\text{其中等号成立的条件：当且仅当 } \begin{cases} 2a^2 = b^2 \\ a+b=1 \\ 2(c-1) = \frac{1}{c-1} \end{cases},$$

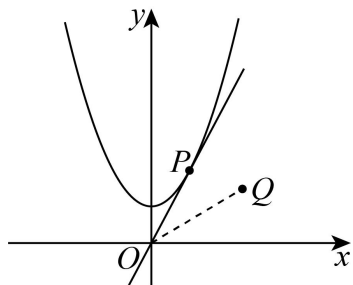
$$\text{解得 } a = \sqrt{2}-1, b = 2-\sqrt{2}, c = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{a^2+1}{ab}-2\right) \cdot c + \frac{\sqrt{2}}{c-1} \text{ 的最小值是 } 4 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为：4 + 2\sqrt{2}.

20. 【解析】设 $Q(\sqrt{3}, 1)$ ，原点 O ，则 $\overrightarrow{OQ} = (\sqrt{3}, 1)$ ， $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ ；

$$\text{所以 } \cos \angle POQ = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{\sqrt{3}x + y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \cos \angle POQ,$$



如图所示，所以当直线 $y = kx$ 与函数 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 在 y 轴右侧相切时， $\cos \angle POQ$ 取到最大值，

即 $\frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 取得最大值；

联立直线 $y = kx$ 与函数 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 可得 $x^2 - kx + \frac{3}{4} = 0$ ，

所以 $\Delta = k^2 - 4 \times \frac{3}{4} = 0$ ，解得 $k = \sqrt{3}$ ($k = -\sqrt{3}$ 舍去)；

$$\text{此时 } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3}{2}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}} = \sqrt{3},$$

即 $\frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

故答案为： $\sqrt{3}$

21. 【详解】因为函数 $f(x) = ae^x, g(x) = 2x + b$ ，当 $a \leq 0$ 时，函数 $f(x) = ae^x$ 为单调递减函数，

$g(x) = 2x + b$ 为单调递增函数，显然 $f(x) \geq g(x)$ 不能恒成立，所以 $a > 0$ ，

由 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立，即 $ae^x \geq 2x + b$ 恒成立，即 $b \leq ae^x - 2x$ 恒成立，

令 $h(x) = ae^x - 2x$ ，可得 $h'(x) = ae^x - 2$ ，

令 $h'(x) = 0$ ，即 $ae^x - 2 = 0$ ，可得 $e^x = \frac{2}{a}$ ，即 $x = \ln \frac{2}{a}$ ，

当 $x \in (-\infty, \ln \frac{2}{a})$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减；

当 $x \in (\ln \frac{2}{a}, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增，

所以当 $x = \ln \frac{2}{a}$ 时，函数 $h(x)$ 取得最小值 $h(\ln \frac{2}{a}) = a \times \frac{2}{a} - 2 \ln \frac{2}{a} = 2 - 2 \ln 2 + 2 \ln a$ ，

所以 $b \leq 2 - 2 \ln 2 + 2 \ln a$ ，

$$\text{则 } \frac{b}{a} \leq \frac{2-2\ln 2+2\ln a}{a} = 2 \times \frac{1-\ln 2+\ln a}{a},$$

$$\text{令 } \varphi(a) = \frac{1-\ln 2+\ln a}{a}, \text{ 可得 } \varphi'(a) = \frac{\ln 2-\ln a}{a^2},$$

当 $0 < a < 2$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增;

当 $a > 2$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减,

当 $a = 2$ 时, 函数取得最大值, 最大值为 $\varphi(2) = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{b}{a} \leq 2 \cdot \varphi(2) = 1$,

即 $\frac{b}{a}$ 的最大值为 1. 故选: B.

$$22. \text{【详解】由 } \frac{e^{2a}}{8} + 2b \leq a + \frac{1}{2} \ln b + 1 \Leftrightarrow e^{2a} - 8a \leq 4 \ln b - 16b + 8,$$

设 $f(x) = e^x - 4x$, 则 $f'(x) = e^x - 4$,

当 $x > \ln 4$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < \ln 4$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \ln 4)$ 上单调递减, 在 $(\ln 4, +\infty)$ 上单调递增,

则 $f(x)_{\min} = f(\ln 4) = 4 - 8 \ln 2$, 故 $f(2a) = e^{2a} - 8a \geq 4 - 8 \ln 2$,

当且仅当 $2a = \ln 4$, 即 $a = \ln 2$ 时取等号;

$$\text{设 } g(x) = 4 \ln x - 16x + 8, \text{ 则 } g'(x) = \frac{4(1-4x)}{x},$$

当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时 $g'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{4} < x$ 时 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{4}\right) = 4 - 8 \ln 2$, 故 $g(b) = 4 \ln b - 16b + 8 \leq 4 - 8 \ln 2$,

当且仅当 $b = \frac{1}{4}$ 时取等号,

又 $f(2a) \leq g(b)$, 则 $f(2a) = g(b) = 4 - 8 \ln 2$,

此时 $a = \ln 2, b = \frac{1}{4}$, 则 $e^a + b = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

故选: A

23【详解】依题意, 函数 $y = \ln ax - 1$ 与 $y = e^x - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增, 且函数 $y = \ln ax - 1$ 的值域是 \mathbf{R} ,

$\forall x > 0$, 不等式 $(\ln ax - 1)(e^x - b) \geq 0$ 恒成立, 当且仅当函数 $y = \ln ax - 1$ 与 $y = e^x - b$ 有相同的零点,

因此 $b > 0$, 由 $\ln ax - 1 = 0$ 得 $x = \frac{e}{a}, a > 0$, 由 $e^x - b = 0$ 得 $b = e^x$, 于是得 $b = e^{\frac{e}{a}}, a > 0$,

则 $ab = a \cdot e^{\frac{e}{a}}, a > 0$, 令 $\frac{e}{a} = t > 0$, $g(t) = ab = \frac{e^{t+1}}{t}$, 求导得 $g'(t) = \frac{e^{t+1}(t-1)}{t^2}$,

当 $0 < t < 1$ 时, $g'(t) < 0$, 当 $t > 1$ 时, $g'(t) > 0$, 因此函数 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

当 $t = 1$ 时, $g(t)_{\min} = g(1) = e^2$, 从而得 $ab = g(t) \geq g(1) = e^2$,

所以 ab 的取值范围为 $[e^2, +\infty)$.

故选: D

24. 【详解】 $f(x) = e^x - mx + n - 1, f'(x) = e^x - m$,

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = n$, 显然 $f(x) \geq 0$ 不恒成立,

当 $m > 0$ 时, $x \in (-\infty, \ln m)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln m) = m - m \ln m + n - 1$,

$\because f(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore m - m \ln m + n - 1 \geq 0$, $\therefore n \geq m \ln m - m + 1$,

$\therefore \frac{n}{m} \geq \frac{m \ln m - m + 1}{m} = \ln m + \frac{1}{m} - 1$, 令 $h(m) = \ln m + \frac{1}{m} - 1, m > 0$,

$h'(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}$, $h(m)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(m)_{\min} = h(1) = 0$. 故选: B

25 【详解】 由基本不等式, 得 $2e^2(a-1) = e^{a-b+c} + e^{a+b-c} \geq 2\sqrt{e^{a-b+c} \cdot e^{a+b-c}} = 2e^a$,

即 $e^{a-2} \leq a-1$, 当且仅当 $a-b+c = a+b-c$, 即 $b=c$ 时等号成立.

设 $f(x) = e^x - x - 1, f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x < 0, f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$, 则 $f(x) \geq 0$, 即 $e^x \geq x+1$,

令 $x = a-2$, 得 $e^{a-2} \geq a-2+1 = a-1$, 所以 $e^{a-2} = a-1$,

解得 $a=2$, 由 $a-b+c = a+b-c$, 得 $b=c$.

所以 $\frac{abc}{a^4+b^4+c^4} = \frac{b^2}{b^4+8} = \frac{1}{b^2+\frac{8}{b^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, 当且仅当 $b = \sqrt{2\sqrt{2}}$ 时, 取得等号.

故 $\frac{abc}{a^4+b^4+c^4}$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

26. 【详解】由基本不等式可得 $\sin\alpha\cos\beta \leq \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\beta}{2}$, $\sin\beta\cos\gamma \leq \frac{\sin^2\beta + \cos^2\gamma}{2}$,

$$\sin\gamma\cos\alpha \leq \frac{\sin^2\gamma + \cos^2\alpha}{2}$$

三式相加, 可得 $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha \leq \frac{3}{2}$,

当且仅当 α, β, γ 均为 $\frac{\pi}{4}$ 时等号成立,

所以 $\tan\theta = \frac{3}{2}$,

则
$$\frac{\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{\sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{1} = \frac{\tan^2\theta + \tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = \frac{15}{13}$$

故选: B

27 【详解】因为 $2\sin A + \sin B = 2\sin C$,

所以 $\sin B = 2(\sin C - \sin A)$, 即 $\sin(A + C) = 2(\sin C - \sin A)$,

因为
$$\sin\frac{C-A}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \quad \cos\frac{C+A}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

所以
$$\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

$$= \sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin C - \frac{1}{2}\sin A$$

所以
$$2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C+A}{2} = 4\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$
 ,

又 $0 < \frac{C+A}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\frac{C+A}{2} > 0$,

所以
$$\sin\frac{C+A}{2} = 2\sin\frac{C-A}{2}$$

$$\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} = 2 \left(\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} - \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right)$$

即 ,

$$\tan \frac{C}{2} = 3 \tan \frac{A}{2}$$

所以 ,

$$\text{设 } m = \tan \frac{A}{2}, \text{ 则 } \tan \frac{C}{2} = 3m, \text{ 显然 } \tan \frac{A}{2} > 0, \tan \frac{C}{2} > 0, \text{ 即 } m > 0,$$

$$\frac{5}{\sin A} + \frac{9}{\sin C} = \frac{5}{\frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}} + \frac{9}{\frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}}$$

所以

$$= \frac{5}{\frac{2 \tan \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{A}{2} + 1}} + \frac{9}{\frac{2 \tan \frac{C}{2}}{\tan^2 \frac{C}{2} + 1}} = \frac{5}{\frac{2m}{m^2 + 1}} + \frac{9}{\frac{6m}{9m^2 + 1}} = \frac{16m^2 + 4}{m} = 16m + \frac{4}{m} \geq 2 \sqrt{16m \cdot \frac{4}{m}} = 16,$$

$$\text{当且仅当 } 16m = \frac{4}{m}, \text{ 即 } m = \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \text{ 时等号成立, 故 } \frac{5}{\sin A} + \frac{9}{\sin C} \text{ 的最小值为 } 16.$$

故选: B

$$28. \text{【详解】由题意得: } 0 \leq \alpha + \beta = \sin \gamma \leq 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

$$\text{则 } (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta),$$

$$\text{当且仅当 } \alpha = \beta \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{即 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{2(\alpha + \beta)} = \sqrt{2 \sin \gamma},$$

$$\text{即 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\cos \gamma} \leq \sqrt{2 \sin \gamma} - \sqrt{\cos \gamma},$$

$$\text{则有 } \begin{cases} 0 \leq \sin \gamma \leq 1 \\ 0 \leq \cos \gamma \leq 1 \end{cases}, \text{ 则 } 2k\pi \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z,$$

$$\text{有 } \sin \gamma \text{ 在 } \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \text{ 单调递增,}$$

$$\cos \gamma \text{ 在 } \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{故 } \sqrt{2 \sin \gamma} - \sqrt{\cos \gamma} \text{ 在 } \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right] \text{ 上单调递增,}$$

则当 $\gamma = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, 即 $\sin \gamma = 1$ 、 $\cos \gamma = 0$ 时,

$\sqrt{2\sin \gamma} - \sqrt{\cos \gamma}$ 有最大值 $\sqrt{2}$,

即 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\cos \gamma}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

29【详解】由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,

两式相减得 $2(a^2 - b^2) = 2c(acosB - bcosA)$,

因为 $c^2 = 2a^2 - 2b^2$, 所以 $c = 2(acosB - bcosA)$,

由正弦定理得 $\sin C = 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)$,

即 $\sin(A + B) = 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)$,

所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2(\sin A \cos B - \sin B \cos A)$,

则 $\sin A \cos B = 3 \cos A \sin B$,

因为在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A, \cos B$ 不同时为 0, $\sin A > 0, \sin B > 0$, 故 $\cos A \neq 0, \cos B \neq 0$,

所以 $\tan A = 3 \tan B$,

又 $c^2 = 3a^2 - 3b^2 > 0$, 所以 $a > b$, 则 $A > B$, 故 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan B > 0$,

所以 $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{2 \tan B}{1 + 3 \tan^2 B} = \frac{2}{\frac{1}{\tan B} + 3 \tan B}$

$\leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{\tan B} \times 3 \tan B}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

当且仅当 $\frac{1}{\tan B} = 3 \tan B$, 即 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立,

又 $0 < A - B < \pi$, 所以 $A - B \leq \frac{\pi}{6}$, 即 $A - B$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

故答案为: $\frac{\pi}{6}$.

30 【详解】 $x > \frac{3}{2}$, $y > 3$, 变形为 $2x - 3 > 0$, $y - 3 > 0$,

令 $a = 2x - 3 > 0$, $b = y - 3 > 0$,

则 $k(2x - 3)(y - 3) \leq 8x^3 + y^3 - 12x^2 - 3y^2$ 转化为

$$k \leq \frac{8x^3 + y^3 - 12x^2 - 3y^2}{(2x-3)(y-3)}, \text{ 即 } \frac{4x^2}{y-3} + \frac{y^2}{2x-3} \geq k,$$

其中 $\frac{4x^2}{y-3} + \frac{y^2}{2x-3} = \frac{(a+3)^2}{b} + \frac{(b+3)^2}{a} \geq \frac{(2\sqrt{3a})^2}{b} + \frac{(2\sqrt{3b})^2}{a}$

$$= 12 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 24 \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 24$$

当且仅当 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 3 \\ \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \end{cases}$, 即 $x = 3, y = 6$ 时取等号, 可知 $k \leq 24$.

故选: B

31. 【详解】 由 $a^2c + b^2c = 1$, 得 $a^2 + b^2 = \frac{1}{c}$,

设 $\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} = M$, 则 $M \geq \frac{1}{a}, M \geq \frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c} = a^2 + b^2 \geq 2ab$,

由 $3M = 2\sqrt{M} \cdot \sqrt{M} + M \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + 2ab = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + 2ab$

$$\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot 2ab} = 3\sqrt[3]{2},$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时, 取等号,

所以 $\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}\right\} = \sqrt[3]{2}$.

故答案为: $\sqrt[3]{2}$.

32. 【详解】若 $a \leq \frac{1}{b}$, 则 $ab \leq 1$, 此时 $\min\left\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\} = \min\left\{a, \frac{1}{a} + 3b\right\}$,

因为 $a\left(\frac{1}{a} + 3b\right) = 1 + 3ab \leq 4$, 所以 a 和 $\frac{1}{a} + 3b$ 中至少有一个小于等于 2,

所以 $\min\left\{a, \frac{1}{a} + 3b\right\} \leq 2$, 又当 $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ 时, $a = \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 3b = 2$,

所以 $\min\left\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\}$ 的最大值为 2.

若 $a > \frac{1}{b}$, 则 $ab > 1$, 此时 $\min\left\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\} = \min\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\}$,

因为 $\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a} + 3b\right) = \frac{1}{ab} + 3 < 4$, 所以 $\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{a} + 3b$ 中至少有一个小于 2,

所以 $\min\left\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\} < 2$.

综上, $\min\left\{a, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + 3b\right\}$ 的最大值为 2.

故答案为: 2.