

导数构造新函数基础类专题参考答案

1. 【解答】解：设 $g(x) = f(x) - 2x - 4$ ，

则 $g'(x) = f'(x) - 2$ ，

\therefore 对任意 $x \in R$ ， $f'(x) > 2$ ，

\therefore 对任意 $x \in R$ ， $g'(x) > 0$ ，

即函数 $g(x)$ 单调递增，

$\therefore f(-1) = 2$ ，

$\therefore g(-1) = f(-1) + 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ ，

则 \therefore 函数 $g(x)$ 单调递增，

\therefore 由 $g(x) > g(-1) = 0$ 得 $x > -1$ ，

即 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为 $(-1, +\infty)$ ，

故选：B。

2. 【解答】解：设 $t = \ln x$ ，

则不等式 $f(\ln x) > 3\ln x + 1$ 等价于 $f(t) > 3t + 1$ ，

设 $g(x) = f(x) - 3x - 1$ ，

则 $g'(x) = f'(x) - 3$ ，

$\therefore f(x)$ 的导函数 $f'(x) < 3$ ，

$\therefore g'(x) = f'(x) - 3 < 0$ ，此时函数单调递减，

$\therefore f(1) = 4$ ，

$\therefore g(1) = f(1) - 3 - 1 = 0$ ，

则当 $x > 1$ 时， $g(x) < g(1) = 0$ ，

即 $g(x) < 0$ ，则此时 $g(x) = f(x) - 3x - 1 < 0$ ，

即不等式 $f(x) > 3x + 1$ 的解为 $x < 1$ ，

即 $f(t) > 3t + 1$ 的解为 $t < 1$ ，

由 $\ln x < 1$ ，解得 $0 < x < e$ ，

即不等式 $f(\ln x) > 3\ln x + 1$ 的解集为 $(0, e)$ ，

故答案为： $(0, e)$ 。

3.【解答】解：定义域为 R 的奇函数 $y = f(x)$ ，

设 $F(x) = xf'(x)$ ，

$\therefore F(x)$ 为 R 上的偶函数，

$$\therefore F'(x) = f(x) + xf''(x)$$

$$\because \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0.$$

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时, } x \cdot f'(x) + f(x) > 0,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } x \cdot f'(x) + f(x) < 0,$$

即 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty, 0)$ 单调递减.

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = a = \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) = F(\ln^3 \sqrt{e}) \quad , \quad F(-3) = b = -3f(-3) = F \quad (\quad 3 \quad) \quad ,$$

$$F\left(\ln \frac{1}{3}\right) = c = \left(\ln \frac{1}{3}\right) f\left(\ln \frac{1}{3}\right) = F(\ln 3),$$

$$\because \ln^3 \sqrt{e} < \ln 3 < 3,$$

$$\therefore F(\ln^3 \sqrt{e}) < F(\ln 3) < F(3).$$

即 $a < c < b$ ，

故选：B.

4.【解答】解： \because 函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称， $\therefore f(x)$ 为定义域内的偶函数，

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f(x) + x \cdot f'(x) < 0$ ，设 $g(x) = xf(x)$ ，

$$\text{则 } g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，则在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，

$$\because 2^1 > 2^{0.2} > 2^0 = 1, \quad 0 < \log_{\pi} 3 < \log_{\pi} \pi = 1, \quad \log_3 9 = 2,$$

$$\therefore 0 < \log_{\pi} 3 < 2^{0.2} < \log_3 9,$$

$$\text{则 } g(\log_{\pi} 3) > g(2^{0.2}) > g(\log_3 9).$$

故答案为： $b > a > c$.

5.【解答】解：定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 满足：

$$f(0) = 0 = f(3) = f(-3),$$

$$\text{且 } f(-x) = -f(x),$$

$$\text{又 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > -xf'(x), \text{ 即 } f(x) + xf'(x) > 0,$$

$$\therefore [xf(x)]' > 0, \text{ 函数 } h(x) = xf(x) \text{ 在 } x > 0 \text{ 时是增函数,}$$

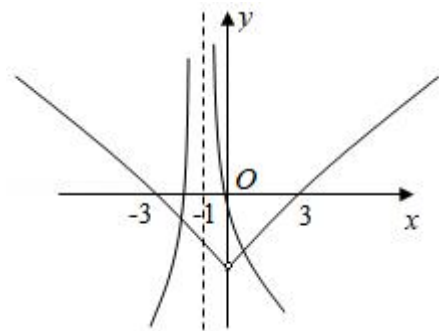
又 $h(-x) = -xf(-x) = xf(x)$ ， $\therefore h(x) = xf(x)$ 是偶函数；

$\therefore x < 0$ 时， $h(x)$ 是减函数，结合函数的定义域为 R ，且 $f(0) = f(3) = f(-3) = 0$ ，

可得函数 $y_1 = xf(x)$ 与 $y_2 = -lg|x+1|$ 的大致图象如图所示，

\therefore 由图象知，函数 $g(x) = xf'(x) + lg|x+1|$ 的零点的个数为 3 个．

故选：C．



6. 【解答】解：设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，

则 $g(x)$ 的导数为： $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，

\therefore 当 $x > 0$ 时总有 $xf'(x) < f(x)$ 成立，

即当 $x > 0$ 时， $g'(x)$ 恒小于 0，

\therefore 当 $x > 0$ 时，函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为减函数，

又 $\therefore g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$ ，

\therefore 函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数

又 $\therefore g(-1) = \frac{f(-1)}{-1} = 0$ ，

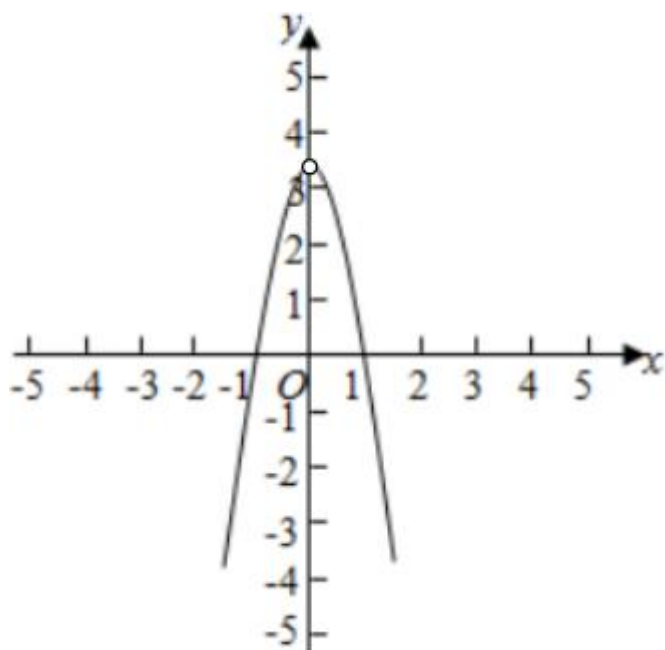
\therefore 函数 $g(x)$ 的图象性质类似如图：

数形结合可得，不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot g(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} ,$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ 或 } x < -1 .$$

故选：A．



7. 【解答】解：令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

因为 $f(x) > f'(x)$ ，所以 $g'(x) < 0$ ，所以函数 $g(x)$ 为 R 上的减函数，

所以 $g(-2016) > g(0) > g(2016)$

即 $\frac{f(-2016)}{e^{-2016}} > \frac{f(0)}{e^0} > \frac{f(2016)}{e^{2016}}$ ，

所以 $f(0) < \frac{f(-2016)}{e^{-2016}} = e^{2016} f(-2016)$ ， $e^{2016} f(0) > f(2016)$ ，

故选：D.

8 【解答】解：根据题意，设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，

其导数 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

又由对任意的实数 x ，有 $f(x) > f'(x)$ ，

则有 $g'(x) < 0$ ，函数 $g(x)$ 为减函数，

又由 $f(x) + 2018$ 为奇函数，则有 $f(0) + 2018 = 0$ ，即 $f(0) = -2018$ ，

$\therefore f(x) + 2018e^x < 0$ ，

$\therefore f(x) < -2018e^x$ ，

$\therefore \frac{f(x)}{e^x} < -2018 = \frac{f(0)}{e^0}$

$\therefore g(x) < g(0)$ ，

又由 $g(x)$ 为减函数，

则有 $x > 0$,

即不等式 $f(x) + 2018e^x < 0$ 的解集是 $(0, +\infty)$;

故选: B .

9 【解答】解: 构造函数: $g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x}$, $g(0) = \frac{0-1}{e^0} = -1$.

\therefore 对任意 $x \in R$, 都有 $f(x) > f'(x) + 1$,

$$\therefore g'(x) = \frac{f'(x)e^x - [f(x)-1]e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) + 1 - f(x)}{e^x} < 0,$$

\therefore 函数 $g(x)$ 在 R 单调递减,

$$\text{由 } f(x) + e^x < 1 \text{ 化为: } g(x) = \frac{f(x)-1}{e^x} < -1 = g(0),$$

$\therefore x > 0$.

\therefore 使得 $f(x) + e^x < 1$ 成立的 x 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

故选: A .

10. 【解答】解: 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x)\cos x - f(x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x},$$

\therefore 对任意的 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x > 0$,

$\therefore g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增,

$$\therefore g(0) < g(\frac{\pi}{4}), \text{ 即 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

$\therefore f(0) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$, 故 A 错误,

$$\therefore g(0) < g(\frac{\pi}{3}), \text{ 即 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}},$$

$\therefore f(0) < 2f(\frac{\pi}{3})$. 故 B 正确.

$$\therefore g(-\frac{\pi}{3}) < g(-\frac{\pi}{4}), \text{ 即 } \frac{f(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})} < \frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\cos(-\frac{\pi}{4})},$$

$\therefore \sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3}) < f(-\frac{\pi}{4})$, 故 C 错误.

$$\therefore g(\frac{\pi}{3}) > g(\frac{\pi}{4}), \text{ 即 } \frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}} > \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

$\therefore \sqrt{2}f(\frac{\pi}{3}) > f(\frac{\pi}{4})$, 故 D 错误,

故选: B .

11 【解答】解: 由题意得, 函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,

故 $f(x)$ 的图象关于原点对称,

故 $f(x)$ 是奇函数,

由函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x \in (0, \pi)$ 满足 $f'(x)\sin x > f(x)\cos x$,

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{\sin x},$$

$$\text{故 } g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x} > 0,$$

故 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 递增,

$$\text{故 } g(\frac{\pi}{6}) < g(\frac{\pi}{3}) < g(\frac{\pi}{2}) < g(\frac{3\pi}{4}) < g(\frac{5\pi}{6}),$$

$$\text{故 } \sqrt{3}f(\frac{\pi}{6}) < f(\frac{\pi}{3}), \quad 2f(\frac{\pi}{3}) < \sqrt{3}f(\frac{\pi}{2}),$$

$$f(\frac{\pi}{2}) < \sqrt{2}f(\frac{3\pi}{4}), \quad f(\frac{3\pi}{4}) < \sqrt{2}f(\frac{5\pi}{6}),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数,

$\therefore A, B, D$ 错误, C 正确,

故选: C .

12. 【解答】解: 根据题意, 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y = f(x) - 1$ 为奇函数, 则有 $f(0) = 1$,

$$\text{设 } g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{f'(x)\cos x - f(x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x},$$

又由在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f'(x) + f(x)\tan x > 0$, 则有 $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数,

$$\text{又由在 } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \cos x > 0, \text{ 则不等式 } f(x) > \cos x \Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} > 1, \text{ 即 } g(x) > g(0),$$

又由函数 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数, 必有 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

即不等式的解集为 $(0, \frac{\pi}{2})$;

故选: D .