

参考答案

1. 解 当 $x=0$ 时, $f(x)=0$, 对任意实数 a 都有 $f(x)\geq 0$;

当 $x>0$ 时, 由 $f(x)\geq 0$ 得, $a\leq \frac{e^x-1-x}{x^2}$,

设 $g(x)=\frac{e^x-1-x}{x^2}$, 则 $g'(x)=\frac{xe^x-2e^x+x+2}{x^3}$,

令 $h(x)=xe^x-2e^x+x+2(x>0)$,

则 $h'(x)=xe^x-e^x+1$,

记 $\varphi(x)=h'(x)$, 则 $\varphi'(x)=xe^x>0$,

$\therefore h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $h'(x)>h'(0)=0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $h(x)>h(0)=0$,

$\therefore g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

由洛必达法则知 $\lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, 故 $a\leq \frac{1}{2}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

2. 解 由题意, 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$ 恒成立等价于 $k<\frac{x\ln x}{x+1}+1-\frac{x\ln x}{x-1}=\frac{2x\ln x}{1-x^2}+1$,

记 $g(x)=\frac{2x\ln x}{1-x^2}+1$,

则 $g'(x)=\frac{2(x^2+1)\ln x+2(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$

$=\frac{2(x^2+1)\left[\ln x+\frac{1-x^2}{x^2+1}\right]}{(1-x^2)^2}$;

又记 $h(x)=\ln x+\frac{1-x^2}{x^2+1}$,

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4x}{(1+x^2)^2}=\frac{(1-x^2)^2}{x(1+x^2)^2}>0$,

所以, 当 $x>0$ 时, $h'(x)\geq 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1)=0$,

因此, 当 $x\in(0,1)$ 时, $h(x)<0$, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $h(x)>0$; 即当 $x\in(0,1)$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $g'(x)>0$;

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

由洛必达法则有

$\lim_{x\rightarrow 1} g(x) = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{2x\ln x}{1-x^2} + 1 = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{2\ln x+2}{-2x} + 1 = 0$,

即当 $x\rightarrow 1$ 时, $g(x)\rightarrow 0$.

所以当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时, $g(x)>0$,

所以 $k \leq 0$.

故所求 k 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.