

比较大小专项靶题参考答案:

1. 【详解】由已知, $0 = \sin 0 < \sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 所以 $1 = \pi^0 < \pi^{\sin 1} < \pi^1 = \pi$, 所以 $1 < b < \pi$,

$1 < e < \pi$, 所以 $0 = \log_{\pi} 1 < \log_{\pi} e < \log_{\pi} \pi = 1$, 所以 $0 < c < 1$

$\sin \pi = 0$, 所以 $a = e^{\sin \pi} = e^0 = 1$, 所以 $a = 1$,

所以 $c < a < b$.

故选: C。

2. 【详解】令 $f(x) = e^x - 1 - \sin x$, $\therefore f'(x) = e^x - \cos x$,

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, $\therefore e^x - \cos x > 0$, $\therefore f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(0.1) > f(0)$, 即 $e^{0.1} - 1 - \sin 0.1 > 0$, $\therefore e^{0.1} - 1 > \sin 0.1$, 即 $a > b$,

令 $g(x) = \ln(x+1) - \sin x$,

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x = \frac{1 - (x+1)\cos x}{x+1} = \frac{1 - x\cos x - \cos x}{x+1},$$

令 $h(x) = 1 - x\cos x - \cos x$, $\therefore h'(x) = (x+1)\sin x - \cos x$

令 $\varphi(x) = (x+1)\sin x - \cos x$, $\therefore \varphi'(x) = 2\sin x + (x+1)\cos x$,

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\therefore h'(x)$ 单调递增,

$$\therefore h'(x) < h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + 1\right)\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi + 6(1 - \sqrt{3})}{12} < 0$$

$\therefore h(x)$ 在 $x \in (0, 0.1)$ 上单调递减, $\therefore h(x) < h(0) = 0$,

$\therefore g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $x \in (0, 0.1)$ 上单调递减,

$\therefore g(0.1) < g(0) = 0$, 即 $\ln 1.1 - \sin 0.1 < 0$, $\therefore c < b$

综上: $c < b < a$.

故选: D.

3. A

【详解】由对数的运算法则得 $b = -\ln 9 = \ln \frac{1}{9}$, $c = \ln(-\ln 0.9) = \ln\left(\ln \frac{10}{9}\right)$.

令函数 $f(x) = \sin x - x$, 则 $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, 即函数 $f(x)$ 在 R 是单调递减.

$$\therefore \sin \frac{1}{9} < \frac{1}{9}$$

令函数 $g(x) = \sin x - \ln(x+1)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $g'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$,

令函数 $h(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $h'(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}$,

$\therefore h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减, 且 $h'(0) = 1 > 0$, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+1\right)^2} < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $h'(x_0) = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, \frac{\pi}{6})$ 单调递减.

又 $\because h(0) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\frac{\pi}{6}+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{6}{\pi+6} > 0 \therefore h(x) > 0$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立

$\therefore g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增 $\therefore g(x) > g(0) = 0$, 则 $\sin x > \ln(x+1)$ 当 $x = \frac{1}{9}$

时, $\sin \frac{1}{9} > \ln\left(\frac{1}{9}+1\right) = \ln \frac{10}{9}$.

又 $\because y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\therefore \ln \frac{10}{9} > 1$

$$\therefore \ln\left(\ln \frac{10}{9}\right) < \ln\left(\sin \frac{1}{9}\right) < \ln \frac{1}{9} \therefore c < a < b$$

故选: C

4. 【详解】由 $ae^{a+1} + b < b \ln b$, 可得 $ae^{a+1} < b \ln b - b = b(\ln b - 1) = b \ln \frac{b}{e}$, 即 $e^a \ln e^a < \frac{b}{e} \ln \frac{b}{e}$,

设 $f(x) = x \ln x$, 可得 $f(e^a) < f\left(\frac{b}{e}\right)$,

因为 $a > 0$, 可得 $e^a > 1$,

又因为 $b(\ln b - 1) > 0$, $b > 0$, 所以 $\ln b > 1$, 即 $b > e$, 所以 $\frac{b}{e} > 1$,

当 $x > 1$ 时, $f'(x) = \ln x + 1 > 0$, 可得函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 为单调递增函数,

所以 $e^a < \frac{b}{e}$, 即 $b > e^{a+1}$.

故选: B.

5 【详解】 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, (x > 0)$,

由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x > e$,

所以 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减;

因为 $\pi > e$,

所以 $f(\pi) < f(e)$, 即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$,

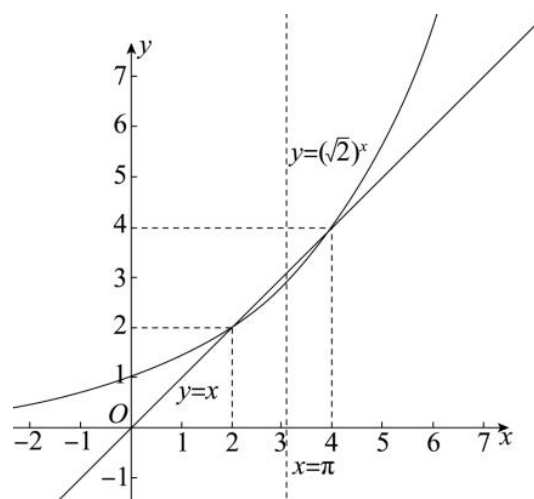
所以 $e \ln \pi < \pi \ln e$, 所以 $\ln \pi^e < \ln e^\pi$,

又 $y = \ln x$ 递增,

所以 $\pi^e < e^\pi$, 即 $b < a$;

$$(\sqrt{2})^{e\pi} = \left[(\sqrt{2})^\pi \right]^e,$$

在同一坐标系中作出 $y = (\sqrt{2})^x$ 与 $y = x$ 的图象, 如图:



由图象可知在 $(2, 4)$ 中恒有 $x > (\sqrt{2})^x$,

又 $2 < \pi < 4$, 所以 $\pi > (\sqrt{2})^\pi$,

又 $y = x^e$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $\pi > (\sqrt{2})^\pi$

所以 $\pi^e > \left[(\sqrt{2})^\pi \right]^e = (\sqrt{2})^{e\pi}$, 即 $b > c$;

综上所述: $c < b < a$,

故选: A

6. A

【详解】设函数 $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = 1 + \ln x$, 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减, 由题 $\frac{\ln 5}{a} = -5 \ln a$, $\frac{\ln 3}{b} = -3 \ln b$, $\frac{\ln 2}{c} = -2 \ln c$, 得 $a \ln a = \frac{1}{5} \ln \frac{1}{5}$, $b \ln b = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3}$, $c \ln c = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4}$, 因为 $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, 所以 $\frac{1}{5} \ln \frac{1}{5} > \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} > \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3}$, 则 $a \ln a > c \ln c > b \ln b$, 且 $a, b, c \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, 所以 $a > c > b$.

故选: A.

7. 【详解】要比较 a, b, c 等价于比较 $\ln a, \ln b, \ln c$ 的大小,

等价于比较 $\frac{\ln a}{(e+0.1)(e-0.1)}, \frac{\ln b}{(e+0.1)(e-0.1)}, \frac{\ln c}{(e+0.1)(e-0.1)}$,

即比较 $\frac{\ln(e-0.1)}{e-0.1}, \frac{e}{e^2-1}, \frac{\ln(e+0.1)}{e+0.1}$,

构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > e$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增, $(e, +\infty)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$,

因为 $\frac{\ln(e-0.1)}{e-0.1} = f(e-0.1)$, $\frac{e}{e^2-1} > \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} = f(x)_{\max}$, $\frac{\ln(e+0.1)}{e+0.1} = f(e+0.1)$,

所以 $\frac{e}{e^2-1}$ 最大, 即 a, b, c 中 b 最大,

设 $x_1 = e-0.1, x_2 = e+0.1, f(x_1) = f(x_3) = m, m < \frac{1}{e}, x_1 \neq x_3$,

结合 $f(x)$ 的单调性得, $x_1 < e < x_3$,

注: 采用极值点偏移, 本函数极值点右偏, 可以得到结论, 以下是极值点偏移构造新函数思想证明的结论。

先证明 $\frac{x_1 - x_3}{\ln x_1 - \ln x_3} < \frac{x_1 + x_3}{2}$, 其中 $0 < x_1 < e < x_3$,

即证 $\ln \frac{x_1}{x_3} < \frac{2(x_1 - x_3)}{x_1 + x_3} = \frac{2(\frac{x_1}{x_3} - 1)}{\frac{x_1}{x_3} + 1}$,

令 $t = \frac{x_1}{x_3} \in (0, 1)$, $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 其中 $0 < t < 1$,

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以, 函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数, 当 $0 < t < 1$ 时, $h(t) < h(1) = 0$,

$$\text{所以, 当 } x_3 > x_1 > 0 \text{ 时, } \frac{x_1 - x_3}{\ln x_1 - \ln x_3} < \frac{x_1 + x_3}{2},$$

$$\text{则有 } 2 \frac{x_1 - x_3}{\ln x_1 - \ln x_3} < x_1 + x_3,$$

$$\text{由 } f(x_1) = f(x_3) = m \text{ 可知 } \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_3}{x_3} = m,$$

$$\text{所以 } 2 \frac{x_1 - x_3}{\ln x_1 - \ln x_3} = 2 \frac{x_1 - x_3}{m(x_1 - x_3)} = \frac{2}{m} < x_1 + x_3,$$

$$\text{因为 } m < \frac{1}{e}, \text{ 所以 } x_1 + x_3 > 2e, \text{ 即 } x_1 > 2e - x_3,$$

因为 $x_1 < e$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 单调递增,

$$\text{所以 } f(x_1) > f(2e - x_3), \text{ 即 } f(x_1) > f(2e - x_3),$$

$$\text{因为 } x_1 + x_2 = 2e, \text{ 所以 } x_1 = 2e - x_2, \text{ 所以 } f(2e - x_2) > f(2e - x_3),$$

$$\text{即 } 2e - x_2 > 2e - x_3, \therefore x_2 < x_3,$$

因为 $e < x_2 < x_3$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 单调递减.

$$\text{所以 } f(x_2) > f(x_3) = f(x_1),$$

$$\text{即 } \frac{\ln(e+0.1)}{e+0.1} > \frac{\ln(e-0.1)}{e-0.1}, \text{ 即 } c > b,$$

综上, $a < c < b$,

故选:B.

8. A

$$\text{【详解】令 } f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x > e, \text{ 由 } f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < e$$

即当 $0 < x < e$ 时 $f(x)$ 单调递减, 当 $x > e$ 时 $f(x)$ 单调递增

$$\text{即当 } x = e \text{ 时 } f(x) \text{ 取得最小值 } f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$$

$$\text{则有 } f(2) > f(e), f(5) > f(e), \text{ 即 } a > b, c > b$$

$$\text{又 } a = \frac{2}{\ln 2} = \frac{30}{15 \ln 2} = \frac{30}{\ln 2^{15}}, c = \frac{5}{\ln 5} = \frac{30}{6 \ln 5} = \frac{30}{\ln 5^6}$$

由 $2^{15} = (2^5)^3 = 32^3 > 25^3 = 5^6$, 可得 $\ln 2^{15} > \ln 5^6 > 0$

则 $\frac{30}{\ln 2^{15}} < \frac{30}{\ln 5^6}$, 即 $a < c$

综上, a 、 b 、 c 的大小关系为 $c > a > b$

故选: A

9. 【详解】因为 $a, b, c \in (e, +\infty)$,

所以由 $a^c > c^a$ 两边取自然对数得 $\ln a^c > \ln c^a$, 即 $c \ln a > a \ln c$, 故 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln c}{c}$,

再由 $c \ln b < b \ln c$ 得 $\frac{\ln b}{b} < \frac{\ln c}{c}$, 故 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln c}{c} > \frac{\ln b}{b}$,

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > e)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

又由上式可知 $f(a) > f(c) > f(b)$, 故 $a < c < b$,

由四个选项的不等式同时除以 e^{a+b+c} 可知, 比较的是 $\frac{\ln a}{e^a}, \frac{\ln b}{e^b}, \frac{\ln c}{e^c}$ 的大小,

故令 $g(x) = \frac{\ln x}{e^x} (x > e)$, 则 $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} e^x - e^x \ln x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \frac{1 - x \ln x}{x e^x}$,

再令 $h(x) = 1 - x \ln x (x > e)$, 则 $h'(x) = -(\ln x + 1) < -(\ln e + 1) = -2 < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < h(e) = 1 - e \ln e = 1 - e < 0$, 故 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

又因为 $a < c < b$, 所以 $g(a) > g(c) > g(b)$, 即 $\frac{\ln a}{e^a} > \frac{\ln c}{e^c} > \frac{\ln b}{e^b}$,

上述不等式两边同时乘以 e^{a+b+c} 得, $e^{b+c} \ln a > e^{a+b} \ln c > e^{a+c} \ln b$.

故选: D.

10. B

【详解】 $a = \ln \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3}, b = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$,

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上递减,

因为 $3 > e$, 所以 $f(3) < f(e)$, 所以 $\frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$,

所以 $a < b$,

因为 $\left(1 + \frac{1}{e}\right)^3 < 1.4^3 = 2.744 < 3$,

所以 $1 + \frac{1}{e} < \sqrt[3]{3}$,

因为 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 所以 $\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) < \ln \sqrt[3]{3}$,

所以 $\ln \frac{e+1}{e} = \ln(e+1) - 1 < \ln \sqrt[3]{3}$, 所以 $c < a$,

所以 $c < a < b$,

故选: B

11. 【详解】由题意知 $a > 0, b > 0, c > 0$,

由 $\frac{\ln a}{e^a} = \frac{\ln b}{b} = -\frac{\ln c}{c} < 0$, 得 $0 < a < 1, 0 < b < 1, c > 1$,

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

因为 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故 $e^a > a, (0 < a < 1)$,

所以 $\frac{\ln a}{e^a} > \frac{\ln a}{a}$, 故 $\frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}, \therefore f(b) > f(a)$, 则 $b > a$, 即有 $0 < a < b < 1 < c$,

故 $a < b < c$,

故选: C

12. A

【详解】令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $a = f\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{\ln \frac{e^2}{3}}{\frac{e^2}{3}}, b = f(e) = \frac{\ln e}{e}, c = f(3) = \frac{\ln 3}{3}$,

而 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 且 $x > 0$, 即 $0 < x < e$ 时 $f(x)$ 单调增, $x > e$ 时 $f(x)$ 单调减, 又 $1 < \frac{e^2}{3} < e < 3$,

$\therefore b > c, b > a$.

若 $t = \frac{\ln x}{x}$ 有两个解 x_1, x_2 , 则 $1 < x_1 < e < x_2, t \in (0, \frac{1}{e})$,

即 $t = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}, x_1 + x_2 = \frac{\ln x_1 x_2}{t}$,

令 $g(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} (x > 1)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

$\therefore g(x) > g(1) = 0$, 即在 $(1, +\infty)$ 上, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, 若 $x = \frac{x_2}{x_1}$ 即 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$, 故

$$t > \frac{2t}{\ln x_1 x_2}, \text{ 有 } x_1 x_2 > e^2$$

$$\therefore \text{当 } x_2 = 3 \text{ 时, } e > x_1 > \frac{e^2}{3}, \text{ 故 } f\left(\frac{e^2}{3}\right) < f(x_1) = f(3),$$

综上: $b > c > a$.

故选: A

13. A

$$\text{【详解】} \because \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{2022 \ln 2020}{2021 \ln 2021} = \frac{\frac{\ln 2020}{2021}}{\frac{\ln 2021}{2022}}, \text{ 构造函数 } f(x) = \frac{\ln x}{x+1} (x \geq e^2), f'(x) = \frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2},$$

$$\text{令 } g(x) = x+1-x \ln x, \text{ 则 } g'(x) = -\ln x < 0,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [e^2, +\infty) \text{ 上单减, } \therefore g(x) \leq g(e^2) = 1 - e^2 < 0, \text{ 故 } f'(x) < 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [e^2, +\infty) \text{ 上单减, } \therefore f(2020) > f(2021) > 0,$$

$$\therefore \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{f(2020)}{f(2021)} > 1$$

$$\therefore \ln a > \ln b \therefore a > b,$$

$$\text{同理可得 } \ln b > \ln c, b > c, \text{ 故 } a > b > c,$$

故选: A

14. A

$$\text{【详解】 设函数 } f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \text{ 令函数}$$

$$g(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } g'(x) = -x \sin x < 0, \text{ 所以函数 } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } g(x) < g(0) = 0, \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减, 所以 } f\left(\frac{1}{6}\right) > f\left(\frac{1}{5}\right), \text{ 即}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} > \frac{\sin \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}, \text{ 所以 } a < b.$$

$$\text{因为 } 30b = 6 \sin \frac{1}{6}, 30c = 2 \cos \frac{5}{6}, \text{ 易证当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } x > \sin x, \text{ 所以 } 30b = 6 \sin \frac{1}{6} < 6 \times \frac{1}{6} = 1,$$

$$\text{而 } 0 < \frac{5}{6} < \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } 30c = 2 \cos \frac{5}{6} > 2 \times \frac{1}{2} = 1, \text{ 所以 } b < c,$$

故选: A.

15. B

【详解】 $\because a = \frac{\sin 1}{3} < \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}, b = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} < \frac{\sqrt{3}}{6}, c = \frac{\pi}{9} - \frac{2-\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{\sqrt{3}}{6},$

$\therefore c > a, c > b,$

对于函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$

令 $g(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$ 则 $g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

$\therefore g(x) < g(0) = 0,$ 即 $f'(x) < 0, f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(1) > f\left(\frac{\pi}{3}\right),$ 即 $\sin 1 > \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}},$

$\therefore a = \frac{\sin 1}{3} > b = \frac{\sqrt{3}}{2\pi},$

$\therefore c > a > b.$

故选: B.

16. B

【详解】法一: 若 $x = \frac{4}{3}, a = x - 1, b = x \ln x,$ 令 $f(x) = x \ln x - (x - 1)$

$f'(x) = \ln x + 1 - 1 = 0, x = 1, f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) > f(1) = 0$

$\therefore \frac{4}{3} \ln \frac{4}{3} > \frac{1}{3},$ 即 $b > a,$ 比较 a 与 c 的大小, 先比较 $\frac{1}{6}$ 与 $\ln\left(\sin \frac{1}{6} + \cos \frac{1}{6}\right)$

若 $x = \frac{1}{6}, \ln\left(\sin \frac{1}{6} + \cos \frac{1}{6}\right) = \ln(\sin x + \cos x)$

令 $g(x) = \ln(\sin x + \cos x) - x, g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} - 1 = \frac{-2 \sin x}{\sin x + \cos x}$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, $g\left(\frac{1}{6}\right) < 0, c < a, \therefore c < a < b.$

17. 【详解】由 $\log_2 a + \log_b 3 = \log_2 b + \log_a 2,$ 变形可知 $\log_2 a - \log_a 2 < \log_2 b - \log_b 2,$

利用换底公式等价变形, 得 $\log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} < \log_2 b - \frac{1}{\log_2 b},$

由函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知, $\log_2 a < \log_2 b,$ 即 $a < b,$ 排除 C, D;

其次, 因为 $\log_2 b > \log_3 b,$ 得 $\log_2 a + \log_b 3 > \log_3 b + \log_a 2,$ 即 $\log_2 a - \log_a 2 > \log_3 b - \log_b 3,$

同样利用 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 的单调性知, $\log_2 a > \log_3 b$,

又因为 $\log_3 b = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{b} > \log_2 \sqrt{b}$, 得 $\log_2 a > \log_2 \sqrt{b}$, 即 $a > \sqrt{b}$, 所以 $\sqrt{b} < a < b$.

故选: B.

18. A

【分析】根据给定条件, 可得 $x > 1, z < 0$, 构造函数, 借助函数单调性比较大小即得.

【详解】因 $\frac{\ln x}{e^x} = \frac{y}{e^y} = -\frac{z}{e^z}$, $y > 1$, 则 $\ln x > 0, -z > 0$, 即 $x > 1, z < 0$,

令 $f(x) = x - \ln x, x > 1$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 有

$f(x) > f(1) = 1 > 0$,

即 $\ln x < x$, 从而当 $x > 1, y > 1$ 时, $\frac{y}{e^y} = \frac{\ln x}{e^x} < \frac{x}{e^x}$, 令 $g(t) = \frac{t}{e^t}, t > 1$, $g'(t) = \frac{1-t}{e^t} < 0$, $g(t)$ 在

$(1, +\infty)$ 上单调递减,

则由 $x > 1, y > 1$, $\frac{y}{e^y} < \frac{x}{e^x}$ 得 $y > x > 1$,

所以 $y > x > z$.

故选: A

19. D

【详解】 $\because a, b, c \in (0, 1)$, $a - \ln a = e - 1$, $b - \ln b = e^2 - 2$, $c - \ln c = e^3 - 3$,

令 $f(x) = x - \ln x$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

令 $g(x) = e^x - x$, $x \in [1, +\infty)$, $g'(x) = e^x - 1$, 当 $x \geq 1$ 时, $e^x - 1 > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 即 $e - 1 < e^2 - 2 < e^3 - 3$,

$\therefore a - \ln a < b - \ln b < c - \ln c$, 即 $f(a) < f(b) < f(c)$,

$\therefore a > b > c$.

故选: D.

20. D

【详解】解: 因为

$$b-c=2+2^{1.2}-2^{2.1}=2+2\cdot 2^{0.2}-2^2\cdot 2^{0.1}=2\left[1-2\cdot 2^{0.1}+\left(2^{0.1}\right)^2\right]=2\left(-2^{0.1}\right)^2>0, \quad ,$$

所以 $b>c$;

$$\text{令 } f(x)=x-1-\ln x(x>1), \quad f'(x)=1-\frac{1}{x}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

$$\text{因为 } 2^{0.2}>1, \text{ 所以 } f(2^{0.2})>f(1), \text{ 即 } 2^{0.2}-1-\ln 2^{0.2}>0,$$

$$\text{所以 } b-a=2+2^{1.2}-4-\frac{2}{5}\ln 2=2\cdot 2^{0.2}-2-2\ln 2^{0.2}=2\left(2^{0.2}-1-\ln 2^{0.2}\right)>0, \quad ,$$

所以 $b>a$;

$$\text{同理 } 2^{0.1}>1, \text{ 所以 } f(2^{0.1})>f(1), \text{ 即 } 2^{0.1}-1-\ln 2^{0.1}>0, \text{ 也即 } 1-2^{0.1}+\ln 2^{0.1}<0,$$

$$\text{所以 } a-c=4+\frac{2}{5}\ln 2-2^{2.1}=4+4\ln 2^{0.1}-2^2\cdot 2^{0.1}=4\left(1+\ln 2^{0.1}-2^{0.1}\right)<0,$$

所以 $a<c$.

综上, $a<c<b$,

故选: D.

21. B

【详解】解析: 因为 $a=e^{\sqrt{0.1}}>e^0=1$, $b=(\sqrt{0.1})^e<(\sqrt{0.1})^0=1$ 所以 $a>b$;

$$\text{又 } c=\frac{2}{2.1-2\sqrt{0.1}}=\frac{2}{2+(\sqrt{0.1})^2-2\sqrt{0.1}}$$

$$\text{构造 } f(x)=e^x-\frac{2}{x^2+2x+2},$$

$$\text{则 } a-c=f(\sqrt{0.1})$$

$$\text{因为 } f(x)=e^x-\frac{2}{x^2+2x+2}=\frac{\left[(x^2-2x+2)e^x-2\right]}{(x-1)^2+1}, \quad (x-1)^2+1\geq 1>0, \quad ,$$

由于函数 $f(x)$ 的分母为正数, 此时只需要判断分子 $\left[(x^2-2x+2)e^x-2\right]$ 的符号,

$$\text{设 } g(x)=(x^2-2x+2)e^x-2, \quad g'(x)=x^2e^x\geq 0,$$

则 $g(x)$ 在 R 上递增, $g(\sqrt{0.1})>g(0)=0$, 即当 $x>0$ 时, $f(x)$ 的分子总是正数,

$$\therefore f(x)>0(x\in(0,+\infty)), \quad ,$$

$$a-c=f(\sqrt{0.1})>0, \text{ 即 } a>c,$$

应用排除法,

故选: B.

22. D

【详解】 $\because a = \ln 3 > \ln e = 1$, $b = \lg 5 < \lg 10 = 1$, $c = \log_{12} 6 < \log_{12} 12 = 1$,

$\therefore a > b$, $a > c$,

$$\because \lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 5}, \quad \log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 6}{1 + \log_2 6},$$

$$\therefore \text{构造函数 } f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} (x > 0),$$

显然函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } \because 0 < \log_2 5 < \log_2 6,$$

$$\therefore f(\log_2 5) < f(\log_2 6), \quad \text{即 } \lg 5 < \log_{12} 6,$$

$$\therefore a > c > b,$$

故选: D.

23. D

【详解】因 $0 < 1 - \frac{3}{\pi} < 0.1 < \frac{\pi}{2}$, 且 $y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 则

$$\tan(1 + \pi - \frac{3}{\pi}) = \tan(1 - \frac{3}{\pi}) < \tan 0.1, \quad \text{即 } a < b,$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{12}), \quad \text{可得 } f'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{而 } y = \cos x \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{12}) \text{ 上递减,}$$

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\pi}{12}) \text{ 时, } 1 > \cos x > \cos \frac{\pi}{12} > 0, \quad \text{则 } 1 > \cos^2 x > \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4},$$

$$\text{即 } f'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\cos^2 x} > \frac{4}{\pi} - \frac{4}{2 + \sqrt{3}} > 0, \quad \text{则 } f(x) \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{12}) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{当 } x \in (0, \frac{\pi}{12}) \text{ 时, } f(x) > f(0) = 0, \quad \text{即 } \frac{4}{\pi}x > \tan x, \quad \text{又 } 0.1 \in (0, \frac{\pi}{12}), \quad \text{则 } c = \frac{0.4}{\pi} > \tan 0.1 = b,$$

所以 $a < b < c$.

故选: D

24. A

【详解】设 a, b, c 分别是 $y = \frac{x}{1+x}, y = \ln(x+1), y = e^x - 1$ 在 $x = 0.01$ 时所对应的函数值,

$$\text{设 } g(x) = e^x - x - 1, \quad \text{则 } g'(x) = e^x - 1,$$

所以 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $e^x - 1 \geq x$,

同理可证 $\ln(x+1) \leq x$,

所以 $\ln(x+1) \leq x \leq e^x - 1$

当 $x = 0.01$ 时, 可得 $\ln 1.01 < e^{0.01} - 1$, 即 $b < c$,

构造函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x} (x \in (-1, +\infty))$,

则 $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} (x \in (-1, +\infty))$,

所以 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

所以 $f(0.01) > f(0)$, 即 $\ln 1.01 - \frac{0.01}{1.01} > \ln 1$,

整理得 $\ln 1.01 > \frac{1}{101}$, 即 $b > a$,

所以 $a < b < c$,

故选: A

25. B

【详解】令 $f(x) = e^x - 1 - \tan x = \frac{\cos x e^x - \cos x - \sin x}{\cos x}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$,

令 $g(x) = \cos x e^x - \cos x - \sin x$, $g'(x) = (-\sin x + \cos x)e^x + \sin x - \cos x = (e^x - 1) \cdot (\cos x - \sin x)$,

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

又 $g(0) = 1 - 1 = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 又 $\cos x > 0$,

所以 $f(x) > 0$, 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 成立, 所以 $f(0.2) > 0$ 即 $a > c$,

令 $h(x) = \ln(x+1) - x$, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$, $h(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数, 所以 $h(x) < h(0) = 0$,

即 $\ln(x+1) < x$,

令 $m(x) = x - \tan x$, $m'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $m(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数, 所以 $m(x) < m(0) = 0$, 即

$$x < \tan x,$$

所以 $\ln(x+1) < x < \tan x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 成立,

令 $x = 0.2$, 则上式变为 $\ln(0.2+1) < 0.2 < \tan 0.2$, 所以 $b < 0.2 < c$

所以 $b < c$,

所以 $b < c < a$.

故答案为: B.

26. A

【详解】因为 $a - b = e^{0.02} - 2e^{0.01} + 1 = (e^{0.01} - 1)^2 > 0$, 所以 $a > b$.

设 $f(x) = 2(e^x - 1) - \sin x - \tan x$,

$$\text{则 } f'(x) = 2e^x - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = 2e^x + \sin x - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \text{ 时, } 2e^x > 2, \sin x > 0, \frac{2\sin x}{\cos^3 x} < \frac{2\sin \frac{\pi}{6}}{\cos^3 \frac{\pi}{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} < 2,$$

所以 $g'(x) > 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增,

从而 $f(x) > f(0) = 0$,

因此 $f(0.01) > 0$, 即 $b > c$.

综上可得 $a > b > c$.

故选: A

27. A

【详解】令 $f(x) = (20 - x)\ln x (x \geq 9)$, 则 $f'(x) = -\ln x + (20 - x) \cdot \frac{1}{x} = -\ln x + \frac{20}{x} - 1$,

显然当 $x \geq 9$ 时, $f'(x)$ 是减函数且 $f'(9) = -\ln 9 + \frac{20}{9} - 1 < 0$, 故 $f(x)$ 是减函数,

$$f(9) > f(10) > f(11), \text{ 即 } 11\ln 9 > 10\ln 10 > 9\ln 11, \ln 9^1 > \ln 10^0 > \ln 11^0,$$

可得 $9^{11} > 10^{10} > 11^9$, 即 $c < a < b$.

故选: A.

28. 【详解】记 $x=0.2$ ，则 $a=e^x$ ， $b=\frac{1}{1-x}$ ， $c=1+\ln(1+x)$ ，

令 $f(x)=e^x-\frac{1}{1-x}=e^x+\frac{1}{x-1}$ ，其中 $x\in(0,1)$ ，则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$ ，

令 $g(x)=e^x(x-1)^2-1$ ，则 $g'(x)=e^x(x^2-2x+1+2x-2)=e^x(x^2-1)$ ，

因为 $0 < x < 1$ ，所以 $g'(x) < 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0,1)$ 时，

$g(x) < g(0) = 0$ ，即当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,1)$ 时， $f(x) < f(0) = 0$ ，所以 $f(0.2) < 0$ ，所以 $a < b$ ，

令 $p(x)=e^x-(1+\ln(1+x))$ ，其中 $x\in(0,1)$ ，则 $p'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$ ，因为 $x\in(0,1)$ 时， $e^x > 1$ ，

$\frac{1}{2} < \frac{1}{x+1} < 1$ ，所以 $p'(x) > 0$ ， $\therefore p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $p(x) > p(0) = 0$ ，所以 $p(0.2) > 0$ ，

$\therefore a > c$ ， $\therefore c < a < b$ ，故选：C.