

## 同构思想专题参考答案

### 函数中的同构思想

1. 思路：本题研究对象并非  $x, y$ ，而是  $(x-1), (y-1)$ ，进而可变形为

$$\begin{cases} (x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1 \\ (y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1 \end{cases}, \text{观察上下式子左边结构相同, 进而可将相同的结构}$$

视为一个函数, 而等式右边两个结果互为相反数, 可联想到函数的奇偶性, 从而利用函数性质求解

$$\text{解: } \begin{cases} (x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3 \\ (y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1 \\ (y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1 \end{cases}$$

设  $f(t) = t^5 + 2t + \sin t$ , 可得  $f(t)$  为奇函数, 由题意可得:

$$\begin{cases} f(x-1) = 1 \\ f(y-1) = -1 \end{cases} \therefore f(x-1) = -f(y-1)$$

$$\therefore x-1 = -(y-1) \Rightarrow x+y=2$$

答案: B

$$2. \text{思路: 注意到 } f(x) \text{ 是增函数, 从而得到 } f(a) = \frac{a}{2}, f(b) = \frac{b}{2}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{a-1} + m = \frac{a}{2} \\ \sqrt{b-1} + m = \frac{b}{2} \end{cases}, \text{ 发}$$

现两个式子为  $a, b$  的同构式, 进而将同构式视为一个方程, 而  $a, b$  为该方程的两个根,  $m$  的取值只需要保证方程有两根即可

解:  $\because f(x)$  为增函数

$$\therefore f(a) = \frac{a}{2}, f(b) = \frac{b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-1} + m = \frac{a}{2} \\ \sqrt{b-1} + m = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$\therefore a, b$  为方程  $\sqrt{x-1} + m = \frac{x}{2}$  在  $[1, +\infty)$  上的两个根, 即  $m = \frac{x}{2} - \sqrt{x-1}$  有两个不同的根

$$\text{令 } t = \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 1$$

所以方程变形为:  $m = \frac{1}{2}(t^2 + 1) - t = \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1)$ , 结合图像可得:  $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

答案:  $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

3.思路: 观察条件可变形为:  $\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$ , 从而得到等式左右的结构均为  $\frac{f(t)}{t}$  的形

式, 且括号内的数间隔为 1。所以  $\frac{f\left(\frac{2015}{2}\right)}{\frac{2015}{2}} = \frac{f\left(\frac{2013}{2}\right)}{\frac{2013}{2}} = \dots = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$ 。因为

$f(x)$  为偶函数, 所以  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ , 由  $\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$  可得  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ,

进而  $\frac{f\left(\frac{2015}{2}\right)}{\frac{2015}{2}} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{2015}{2}\right) = 0$

答案: A

4.思路: 本题很难直接去解不等式, 观察式子特点可发现若将关于  $\sin \theta, \cos \theta$  的项分居在不等号两侧:  $\cos^5 \theta + 7 \cos^3 \theta < \sin^5 \theta + 7 \sin^3 \theta$ , 则左右呈现同构的特点, 将相同的结构设为函数  $f(x) = x^5 + 7x^3$ , 能够判断  $f(x)$  是奇函数且单调递增。所以不等式

$f(\cos \theta) < f(\sin \theta)$  等价于  $\cos \theta < \sin \theta$ , 即  $\sin \theta - \cos \theta > 0 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ , 所

以  $2k\pi < \theta - \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 结合  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 可得  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

答案:  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

5.思路: 本题从选项出发可发现, 每个选项通过不等式变形将  $x_1, x_2$  分居在不等式两侧后都具备同构的特点, 所以考虑将相同的形式构造为函数, 从而只需判断函数在  $(0, 1)$  的单调性即可

解: A 选项:  $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_2} - \ln x_2 > e^{x_1} - \ln x_1$ , 设  $f(x) = e^x - \ln x$

$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x}$ , 设  $g(x) = xe^x - 1$ , 则有  $g'(x) = (x+1)e^x > 0$  恒成立, 所

以  $g(x)$  在  $(0,1)$  单调递增, 所以  $g(0) = -1 < 0, g(1) = e - 1 > 0$ , 从而存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使

得  $g(x_0) = 0$ , 由单调性可判断出:

$x \in (0, x_0), g'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, x \in (x_0, 1), g'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  不单调, 不等式不会恒成立

B 选项:  $e^{x_1} - e^{x_2} > \ln x_2 - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_1} + \ln x_1 > e^{x_2} + \ln x_2$ , 设  $f(x) = e^x + \ln x$  可知  $f(x)$

单调递增。所以应该  $f(x_1) < f(x_2)$ , B 错误

C 选项:  $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2}$ , 构造函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ , 则

$f'(x) < 0$  在  $x \in (0,1)$  恒成立。所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  单调递减, 所以  $f(x_1) > f(x_2)$  成立

D 选项:  $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} < \frac{e^{x_2}}{x_2}$ , 同样构造  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ , 由 C 选项分析可知 D 错误

答案: C

6.

解析: 由  $x^2 + x \ln a > a e^x \ln x \Rightarrow \frac{x + \ln a}{a e^x} > \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(a e^x)}{a e^x}$  对  $\forall x \in (0,1)$  恒成立。

构造  $h(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0,1)$ ,  $h(x)$  单增,

所以:  $x < a e^x \Rightarrow a > \frac{x}{e^x} \Rightarrow a > \left[\frac{x}{e^x}\right]_{\max}$ , 因为  $x \in (0,1) \therefore a \geq \frac{1}{e}$

7.

解:  $e^{\lambda x} - \frac{\ln x}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \lambda x e^{\lambda x} \geq x \ln x = \ln x e^{\ln x}$ , 即  $\lambda x \geq \ln x$  恒成立,  $\lambda \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$ ,

8.

解:  $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Rightarrow x^2 \ln x \geq m e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow e^{\ln x} \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow \frac{m}{x} \leq \ln x$ ,

得  $m \leq (x \ln x)_{\min} = e$  (注意定义域)。

9.

解: 由题意得  $2x^3 \ln x \geq me^{\frac{m}{x}} \Rightarrow x^2 \ln x^2 \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow e^{\ln x^2} \ln x^2 \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}}$ ,

$$\text{即 } \ln x^2 \geq \frac{m}{x}, \Rightarrow m \leq (x \cdot \ln x^2)_{\min} = -\frac{2}{e}.$$

10.

解: 由题意得:  $m \ln(x+1) - 3x - 3 > mx - 3e^x \Rightarrow 3(e^x - x - 1) > mx - m \ln(x+1)$ ,

右边凑1, 得  $3(e^x - x - 1) > m(x+1 - \ln(x+1) - 1) \Rightarrow 3(e^x - x - 1) > m(e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1)$

得  $m \leq 3$ . (说明: 定义域大于零, 所以  $x > \ln(x+1)$ ,  $m=3$  成立).

另解

### ● 解析

4. C 解析: 令  $g(x) = m \ln x - 3x$ , 则问题等价于  $g(x+1) > g(e^x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上恒成立. 因为当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $1 < x+1 < e^x$ , 所以只需要  $g(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减, 即当  $x > 1$  时,  $g'(x) \leq 0$  恒成立, 即  $\frac{m}{x} - 3 \leq 0$ , 所以  $m \leq 3x$ , 所以  $m \leq 3$ .

11.

解: 由题意得:  $2ae^{2x} - \ln x + \ln a \geq 0 \Rightarrow 2ae^{2x} \geq \ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a}$

$$\Rightarrow 2xe^{2x} \geq \frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} = \ln \frac{x}{a} e^{\ln \frac{x}{a}} \Rightarrow 2x \geq \ln \frac{x}{a} \Rightarrow a \geq \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)_{\min} = \frac{1}{2e}$$

12.

解析:  $x + \ln x + e^{-x} \geq x^\alpha \Rightarrow x + e^{-x} \geq -\ln x + x^\alpha = -\ln x^\alpha + e^{-(-\ln x^\alpha)}$

$$\text{令 } g(x) = x + e^{-x} \Rightarrow g'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow g(x) \geq g(-\ln x^\alpha)$$

$$\Rightarrow x \geq -\ln x^\alpha \Rightarrow \alpha \geq -\frac{x}{\ln x}, (x > 1) \Rightarrow \alpha \geq -e$$

13.

解析:  $2x^2 e^{2x} + \ln x = 0 \Rightarrow 2xe^{2x} = -\frac{1}{x} \ln x = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{x} e^{\ln \frac{1}{x}}$

$$\Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{x} \Rightarrow 2x_0 + \ln x_0 = 0$$

14.

解：由题意得： $ax \cdot e^{ax} + ax \geq 2x^2 \ln x + 2 \ln x = x^2 \ln x^2 + \ln x^2$

即  $ax \cdot e^{ax} + ax \geq \ln x^2 \cdot e^{\ln x^2} + \ln x^2$ ,

得  $ax \geq \ln x^2 \Rightarrow a \geq \left( \frac{2 \ln x}{x} \right)_{\max} = \frac{2}{e}$ .

15.

解析：由题意得： $e^x - x - 1 \geq k[x - \ln(x+1)]$

右边式子凑 1 得  $e^x - x - 1 \geq k[x+1 - \ln(x+1) - 1]$

即  $e^x - x - 1 \geq k[e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1]$ ，因为  $x \geq \ln(x+1)$

当且仅当  $x=0$  等号成立，所以满足  $k \leq 1$  即可

当且仅当  $e^x - x - 1 = 1$ ，即  $x=0$  等号成立，所以  $k \leq 1$ .

### 数列中的同构思想

1.思路：本题递推公式较为复杂，所以考虑先化简分式，观察到分子中含有分母的项，所以

想到分离常数简化分式，即  $a_{n+1} + 1 = \frac{2(t^{n+1} - 1)(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1}$ ，寻求相邻同构的特点，转化为

$\frac{a_{n+1} + 1}{t^{n+1} - 1} = \frac{2 \cdot \frac{a_n + 1}{t^n - 1}}{\frac{a_n + 1}{t^n - 1} + 2}$ ，即可设  $b_n = \frac{a_n + 1}{t^n - 1}$ ，递推公式变为  $b_{n+1} = \frac{2b_n}{b_n + 2}$ ，则能够求出  $b_n$  通项公

式，进而求出  $a_n$

解： $a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}$

$$= \frac{(2t^{n+1} - 2)a_n + 2t^{n+1} - 2 + (-a_n - 2t^n + 1)}{a_n + 2t^n - 1} = \frac{2(t^{n+1} - 1)(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1} - 1$$

$$\therefore a_{n+1} + 1 = \frac{2(t^{n+1} - 1)(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}+1}{(t^{n+1}-1)} = \frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}+1}{(t^{n+1}-1)} = \frac{2 \frac{(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+2t^n-1}{t^n-1}}$$

$$\text{设 } b_n = \frac{a_n+1}{t^n-1}, \text{ 则递推公式变为 } b_{n+1} = \frac{2b_n}{b_n+2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n+2}{2b_n} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}, \text{ 且 } \frac{1}{b_1} = \frac{t-1}{a_1+1} = \frac{t-1}{2t-3+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{b_n} \right\} \text{ 为公差是 } \frac{1}{2} \text{ 的等差数列}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

$$\therefore \frac{t^n-1}{a_n+1} = \frac{n}{2}, \text{ 解得 } a_n = \frac{2(t^n-1)}{n} - 1$$

解析几何中的同构思想

$$1. \text{解: (1) } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad b=1$$

$$\therefore a^2 - c^2 = b^2 = 1 \quad \text{解得 } a = \sqrt{5}, c = 2$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$$

(2) 思路: 本题肯定从  $\overrightarrow{RA} = \lambda \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{RB} = \mu \overrightarrow{BF}$  入手, 将向量关系翻译成坐标的方程, 但观察发现两个等式除了  $A, B$  不同, 系数  $\lambda, \mu$  不同, 其余字母均相同。且  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  也仅是角标不同。所以可推断由  $\overrightarrow{RA} = \lambda \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{RB} = \mu \overrightarrow{BF}$  列出的方程是同构的, 而  $A, B$  在同一椭圆上, 所以如果用  $\lambda, \mu$  表示  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , 代入椭圆方程中也可能是同构的。通过计算可得:

$$\begin{cases} \lambda^2 + 10\lambda + 5 - 20k^2 = 0 \\ \mu^2 + 10\mu + 5 - 20k^2 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \lambda, \mu \text{ 为方程 } x^2 + 10x + 5 - 20k^2 = 0 \text{ 的两个不同根, 进而利用}$$

韦达定理即可得到  $\lambda + \mu = -10$

解: 由 (1) 得  $F(2, 0)$ , 设直线  $l: y = k(x - 2)$ , 可得  $R(0, -2k)$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

可得:  $\overrightarrow{RA} = (x_1, y_1 + 2k), \overrightarrow{AF} = (2 - x_1, -y_1)$ , 由  $\overrightarrow{RA} = \lambda \overrightarrow{AF}$  可得:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda(2 - x_1) \\ y_1 + 2k = -\lambda y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \\ y_1 = \frac{-2k}{1+\lambda} \end{cases} \textcircled{1}$$

因为  $A$  在椭圆上,  $\therefore x_1^2 + 5y_1^2 = 5$ , 将①代入可得:

$$\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + 5\left(\frac{-2k}{1+\lambda}\right)^2 = 5 \Rightarrow 4\lambda^2 + 20k^2 = 5(\lambda+1)^2$$

$$\therefore \lambda^2 + 10\lambda + 5 - 20k^2 = 0$$

$$\text{对于 } \mu, \quad \overrightarrow{RB} = (x_2, y_2 + 2k), \overrightarrow{BF} = (2 - x_2, -y_2), \quad \overrightarrow{RB} = \mu \overrightarrow{BF}$$

$$\text{同理可得: } \therefore \mu^2 + 10\mu + 5 - 20k^2 = 0$$

$$\therefore \lambda, \mu \text{ 为方程 } x^2 + 10x + 5 - 20k^2 = 0 \text{ 的两个不同根}$$

$$\therefore \lambda + \mu = -10$$

2.解: 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $PA$  的斜率为  $k$

$$\text{则 } PA: y - y_1 = k(x - x_1), \text{ 联立方程 } \begin{cases} y - y_1 = k(x - x_1) \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得:}$$

$$x^2 - [kx + (-kx_1 + y_1)]^2 = 1, \text{ 整理可得:}$$

$$(1 - k^2)x^2 - 2k(y_1 - kx_1)x - (y_1 - kx_1)^2 - 1 = 0, \text{ 因为 } PA \text{ 与双曲线相切}$$

$$\text{所以 } \Delta = 4k^2(y_1 - kx_1)^2 + 4(1 - k^2)(y_1 - kx_1)^2 + 4(1 - k^2) = 0$$

$$\therefore 4(y_1 - kx_1)^2 + 4(1 - k^2) = 0$$

$$k^2x_1^2 - 2kx_1y_1 + y_1^2 + 1 - k^2 = 0 \Rightarrow (x_1^2 - 1)k^2 - 2kx_1y_1 + (y_1^2 + 1) = 0$$

$$\because x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \therefore x_1^2 - 1 = y_1^2, y_1^2 + 1 = x_1^2 \text{ 代入可得:}$$

$$y_1^2k^2 - 2x_1y_1k + x_1^2 = 0 \text{ 即 } (y_1k - x_1)^2 = 0$$

$$\text{即 } k = \frac{x_1}{y_1}$$

$$\therefore PA: y - y_1 = \frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow y_1y = x_1x - 1$$

同理, 切线  $PB$  的方程为  $y_2y = x_1x - 1$

$\because P(m, y_0)$  在切线  $PA, PB$  上, 所以有 
$$\begin{cases} y_0 y_1 = mx_1 - 1 \\ y_0 y_2 = mx_2 - 1 \end{cases}$$

$\therefore A, B$  满足直线方程  $y_0 y = mx - 1$ , 而两点唯一确定一条直线

$\therefore AB: y_0 y = mx - 1$  所以当  $\begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ y = 0 \end{cases}$  时, 无论  $y_0$  为何值, 等式均成立

$\therefore$  点  $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$  恒在直线  $AB$  上, 故无论  $P$  在何处,  $AB$  恒过定点  $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$

### 不等式中的同构思想

1. 思路: 观察  $a|a| > b|b|$  可发现其同构的特点, 所以将这种结构设为函数  $f(x) = x|x|$ , 分析

其单调性。  $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$  可得  $f(x)$  为增函数。所以  $a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$ , 即

$a > b \Leftrightarrow a|a| > b|b|$ , 所以是充要条件

答案: C