

恒成立与存在性专项靶题

常见双变量类型：

（一）双变量双函数的不等式型：

$$\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [a, b], f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max};$$

$$\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [a, b], f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min};$$

$$\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [a, b], f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min};$$

$$\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [a, b], f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max};$$

（二）双变量单函数的绝对值不等式型

$$\text{对任意的 } x_1, x_2 \in A, |f(x_1) - f(x_2)| \leq a \Leftrightarrow f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a;$$

$$\text{存在 } x_1, x_2 \in A, |f(x_1) - f(x_2)| \geq a \Leftrightarrow f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \geq a;$$

（三）双变量双函数的等式型

$\forall x_1 \in A, \exists x_2 \in B$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，则 $f(x)$ 值域是 $g(x)$ 值域的子集；

$\exists x_1 \in A, \exists x_2 \in B$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，则 $f(x)$ 值域与 $g(x)$ 值域的交集非空。

1. 已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 的图像在 $x = e$ （ e 为自然对数的底数）处的切线斜率为 3.

若 $f(x) \leq kx^2$ 对任意 $x > 0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

2. 若不等式 $x^2 - 2y^2 \leq cx(y - x)$ 对任意满足 $x > y > 0$ 的实数 x, y 恒成立，则实数 c 的最大值为 _____.

3. 已知 $a > 0$ ， $f(x) = ax^2 - (a + 2)x + \ln x + 2$ ，若 $f(x) < 0$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上有解，求 a 的取值范围

4. 关于 x 的不等式 $2x - 1 > m(x^2 - 1)$ 对满足 $m \in [-2, 2]$ ，一切实数 m 恒成立，求 x 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = x^2$ ， $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$ ，若对任意 $x_1 \in [0, 2]$ ，存在 $x_2 \in [1, 2]$

都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ，求实数 m 的取值范围

6. 已知函数 $f(x) = mx - a \ln x - m$ ， $g(x) = \frac{ex}{e^x}$ （其中 m, a 均为实数）.

设 $m = 1, a < 0$ ，若对任意的 $x_1, x_2 \in [3, 4] (x_1 \neq x_2)$ ， $|f(x_2) - f(x_1)| < \left| \frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)} \right|$ ，求 a 的最

小值；

7. 已知函数 $f(x) = \ln x - x$, $g(x) = \frac{1}{3}bx^3 - bx$, $b \neq 0$, 若对任意的 $x_1 \in (1, 2)$, 总存

在 $x_2 \in (1, 2)$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 求实数 b 的取值范围

8. 已知函数 $f(x) = e^{4x-1}$, $g(x) = \frac{1}{2} + \ln(2x)$, 若 $f(m) = g(n)$ 成立, 则 $n - m$ 的最小值为

9. 已知函数 $f(x) = \ln x - mx^2 - x$. 若任意 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{e}, e]$, $x_1 \neq x_2$, 都有

$x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > x_1 x_2 (x_2 - x_1)$, 求实数 m 的取值范围.

恒成立问题——数形结合法

1: 已知不等式 $(x-1)^2 < \log_a x$ 在 $x \in (1, 2)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____

2: 若不等式 $\log_a x > \sin 2x$ ($a > 0, a \neq 1$) 对于任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 都成立, 则实数 a 的取值范围是_____

3: 若不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 求 c 的取值范围

4: 已知函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$, 若对任意的 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____