

数列中的不等关系专项靶题

1: 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $c_n = 2^n \left(\frac{n}{a_n} - \lambda \right)$, 若数列 $\{c_n\}$ 是单调递减数列, 求实数 λ 的取值范围

2: 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n} (n \in N^*)$, 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且

$$a_1 = 2, b_3 = 6 + b_2$$

(1) 求 a_n, b_n

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} (n \in N^*)$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

① 求 S_n

② 求正整数 k , 使得对于 $\forall n \in N^*$, 均有 $S_k \geq S_n$

3: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$ 且 $2nS_{n+1} - 2(n+1)S_n = n(n+1)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足:

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0, \quad b_3 = 5, \quad \text{其前9项和为63}$$

(1) 求 a_n, b_n

(2) 令 $c_n = \frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n}$, 记 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 对 $\forall n \in N^*$, 均有 $T_n - 2n \in [a, b]$, 求 $b - a$

的最小值

4. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{2a_n}{a_{n+1}} = 1 (n \in N^*)$, 且

$$S_5 + 2 = a_6$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (2) 若 $n \in N^*$, 令 $b_n = a_n^2$, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

试比较 $\frac{T_{n+1} + 12}{4T_n}$ 与 $\frac{4n+6}{4n-1}$ 的大小

5：已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3=9, a_5=17$ ，记数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若

$S_{2n+1} - S_n \leq \frac{m}{10} (m \in \mathbb{Z})$ ，对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，则整数 m 的最小值是-----

6、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1=1$ ，且 $na_{n+1}=2S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\frac{1}{2}, b_2=\frac{1}{4}$ ，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式

(2) 令 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ ，若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ，不等式

$\lambda nT_n + 2b_nS_n > 2(\lambda n + 3b_n)$ 恒成立，试求实数 λ 的取值范围

7、数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且对一切正整数 n 都有 $S_n = n^2 + \frac{1}{2}a_n$ 。

(1) 求证： $a_{n+1} + a_n = 4n + 2$

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(3) 是否存在实数 a ，使得不等式 $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < \frac{2a^2 - 3}{2a\sqrt{2n+1}}$ 对一切正整

数 n 都成立？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由

8. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2}{4}$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $3b_n - b_{n-1} = n (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 求证：当 $b_1 \neq \frac{1}{4}$ 时，数列 $\{b_n - a_n\}$ 为等比数列

(3) 在 (2) 的条件下，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若数列 $\{T_n\}$ 中只有 T_3 最小，求 b_1 的取值范围

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 4n + 3$

(1) 当 $a_1 = 2$ 时，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n

(2) 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有 $\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}} \geq 4$ 成立，求 a_1 的取值范围

10、已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1, a_2 = 3$ ，且 $a_{n+2} = \left(1 + 2 \left| \cos \frac{n\pi}{2} \right| \right) a_n + \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right|, n \in N^*$

(1) 证明：数列 $\{a_{2k}\} (k \in N^*)$ 为等比数列

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(3) 设 $b_k = a_{2k} + (-1)^{k-1} \lambda \cdot 2^{a_{2k-1}}$ (λ 为非零整数)，试确定 λ 的值，使得对任意 $k \in N^*$ ，

都有 $b_{k+1} > b_k$ 成立