

无锡市市北高级中学 2024--2025 学年第一学期

高三年级数学学科阶段检测卷

时间：120 分钟

分值：150 分

日期：2024. 10

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

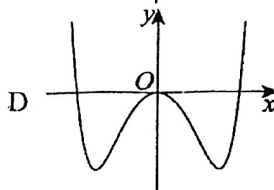
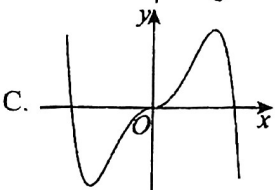
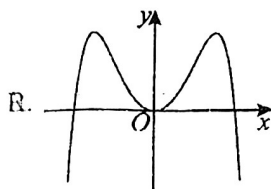
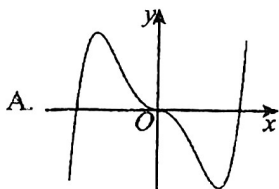
1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x | 2x^2 - 7x + 3 < 0\}$ ， $B = \{y | y = x + \frac{1}{x}, x > 0\}$ ，则 $A \cup (C_U B) = ()$

- A. $(-\infty, 3)$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, 2)$ D. $(-\infty, +\infty)$

2. 对于实数 x ，“ $|x| < 1$ ”是“ $x < 1$ ”的()条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

3. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为()



4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0, \end{cases}$ 则下列说法正确的是()

- A. $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的增函数
B. $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$
C. “ $x > \frac{1}{4}$ ”是“ $f(x) > \frac{1}{2}$ ”的充要条件
D. 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 恰有一个实根，则 $a > 1$

5. 已知 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$ ， $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$ ，则 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 2

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个极大值点，则正实数 ω 的可能取值为()

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

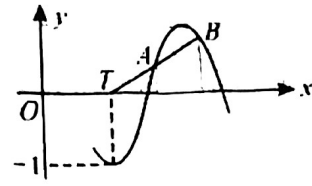
7. 如图, 在函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象中, 若 $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{AB}$, 则点 A 的纵坐标为()

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

D. $2 - \sqrt{3}$



8. 已知函数 $f(x) = e^{|x|} - \frac{1}{2}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \\ (x-1)\ln x, & x > 0 \end{cases}$. 若关于 x 的方程 $g(f(x)) - m = 0$

有四个不同的解, 则实数 m 的取值集合为()

A. $(0, \frac{\ln 2}{2})$

B. $(\frac{\ln 2}{2}, 1)$

C. $\{\frac{\ln 2}{2}\}$

D. $(0, 1)$

二、多选题: 本题共 3 小题, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。

9. 设 z_1, z_2 是复数, 则下列说法正确的是()

A. 若 $z_1^2 = 0$, 则 $z_1 = 0$

B. 若 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 则 $z_1 = z_2 = 0$

C. $|z_1 - i \cdot z_1| = |z_1 + i \cdot z_1|$

D. 若 $z_1^2 = z_2^2$, 则 $|z_1| = |z_2|$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{5\pi}{4})$, 则()

A. $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{3}{8}\pi, 0)$

B. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到的是奇函数的图象

C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$ 上单调递增

D. 若 $y = f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上与 $y = 1$ 有且只有 6 个交点, 则 $m \in (\frac{5\pi}{2}, \frac{13\pi}{4}]$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$, 则下列说法正确的是

A. 存在直线 $y = t (t \in \mathbb{R})$ 与 $y = f(x)$ 有 2 个交点

B. 若 $f(x)$ 在区间 $(m, +\infty)$ 上单调, 则 $m \geq e^{\frac{1}{2}}$

C. 若 $0 < a < e^{\frac{3}{2}}$, 过点 $(a, f(a))$ 仅可作函数 $f(x)$ 的一条切线

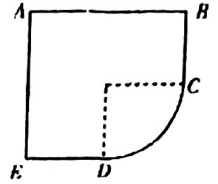
D. 若 $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{4}x^2 - ax$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 则 $g(x_1) + g(x_2) > -\frac{1}{4}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. i 是虚数单位, 若 $z + |\bar{z}| = 8 + 4i$, 则 $z =$ _____.

13. 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数. 例如: $[2.1] = 2$, $[-3.1] = -4$. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x + 3}{1 + 2^{x+1}}$, 则 $[f(-1)] = \underline{\hspace{2cm}}$, 函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 迷你KTV是一类新型的娱乐设施, 外形通常是由玻璃墙分隔成的类似电话亭的小房间, 近几年投放在各大城市商场中, 受到年轻人的欢迎. 如图是某间迷你KTV的横截面示意图, 其中 $AB = AE = \frac{3}{2}$, $\angle A = \angle B = \angle E = 90^\circ$, 曲线段 CD 是圆心角为 90° 的圆弧, 设该迷你KTV横截面的面积为 S , 周长为 L , 则 $\frac{S}{L}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本题中取 $\pi = 3$ 进行计算)

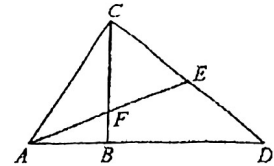


四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题 13 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$, 点 E 是 CD 的中点, AE 与 BC 相交于 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

(1) 用 \vec{a} , \vec{b} 表示 \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{DE} ;

(2) 若在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, -2)$, $B(3, -2)$, $C(3, 10)$, 求 $|\overrightarrow{AF}|$.



16. (本小题 15 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2c + b = 2a \cos B$.

(1) 求角 A ;

(2) 若角 A 的平分线与 BC 交于点 M , $BM = 4\sqrt{7}$, $CM = 2\sqrt{7}$, 求线段 AM 的长.

17. (本小题 15 分) 已知 $\vec{a} = (2\cos x, 2\sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6}))$, $\vec{b} = (\cos x, -\cos(x + \frac{\pi}{6}))$, 记 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心;

(2) 若 $f(\frac{x_0}{2}) = \frac{1}{3}$, $x_0 \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$, 求 $\cos 2x_0$.

18. (本小题 17 分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$.

(1) 讨论函数 $F(x) = ax - f(x)$ ($a \in R$) 的单调性;

(2) 设函数 $g(x) = (x+1)f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x}+1\right)$.

(i) 求 $g(1) - g(-2)$ 的值;

(ii) 证明: 存在实数 m , 使得曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = m$ 对称.

19. (本小题 17 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$.

(1) 若过点 $(1,0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 .

① 求 a 的取值范围;

② 当 $x_1 > 4x_2$ 时, 证明: $x_1 x_2^2 > 16e^3$.