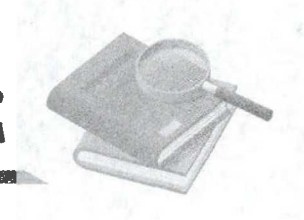

一道最值问题的多解探究

张　艳（福建省福州第八中学）

本文给出的经典的最值问题，试图从不同的角度探究该问题的多种解法，旨在启迪读者发散思维，厘清常用解题思维，进一步提高分析、解决此类问题的实际能力。

题目：已知 $x>0,y>0,x+y=3$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为________。

解法 1：（“1”的妙用）由条件 $x+y=3$ 和均值不等式，有 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\cdot\left(5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}\right)=3$，等号成立当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即 $x=1,y=2$。故 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为 3。

评注：①利用“1”的特性巧妙代换，可为均值不等式的灵活运用创造有利条件；②由于本题是求最值问题，所以必须检验不等式中的等号能否真正取到。③请思考以下解法的错误之处：因为 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\cdot(x+y)\geqslant\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{\frac{4}{xy}}\cdot 2\sqrt{xy}=\frac{8}{3}$，故所求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$。

解法 2：（消元法）由 $x+y=3$ 得 $x=3-y$，于是 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3-y}+\frac{4}{y}=3\cdot\frac{4-y}{3y-y^2}$。又易知 $0<y<3$，令 $t=4-y$，则 $t>0$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{3t}{3(4-t)-(4-t)^2}=\frac{3t}{-t^2+5t-4}=\frac{3}{5-\left(t+\frac{4}{t}\right)}$。又由 $t>0$ 得 $t+\frac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$，所以 $0<5-\left(t+\frac{4}{t}\right)\leqslant 5-4=1$，从而 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant 3$，当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$，亦即 $x=1,y=2$

$\frac{4x-4}{x^2(2-x)^2}(0<x<2)$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$。当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减。所以 $[f(x)]_{\min}=f(1)=2$。所以 $f(x)\geqslant 2$，即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\geqslant 2$。

（7）判别式法。通过引入变量，将不等式的证明问题转化为求变量的取值范围的问题，根据一元二次方程有实根，再利用判别式求证。

证法 9：设 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=t(t>0)$，则 $y=\frac{x}{tx-1}$，代入 $x+y=2$ 并整理得 $tx^2-2tx+2=0$。因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\Delta=4t^2-8t\geqslant 0$，所以 $t\geqslant 2$ 或 $t\leqslant 0$（舍去），所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2$。

（8）柯西不等式法。利用柯西不等式二维形式公式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$（等号成立的条件，当且仅当 $ad=bc$ 时）进行证明。

证法 10：因为 $x>0,y>0,x+y=2$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2=2$。当且仅当 $\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$，即 $x=y=1$ 时，取等号。

以上探讨的是适合本题的证明方法，其实不等式的证明方法除了比较法、综合法、分析法、反正法、换元法这几种常见方法以外，还有许多，如放缩法、构造法、解析法、数学归纳法法、导数法等，灵活运用各种证明方法，会让我们体会到数学的奥妙之处，增加我们学习数学的兴趣。

时不等式取等号。故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：在“消元”的基础上，还需要借助“换元”作进一步的变形，这样处理有利于灵活运用均值不等式。

解法3：（代数换元法）依题意可设$x=ky(k>0)$，则$ky+y=3$，于是$y=\frac{3}{k+1}$，$x=\frac{3k}{k+1}$，从而$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{k+1}{3k}+\frac{4(k+1)}{3}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3k}+\frac{4k}{3}\geqslant\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{1}{3k}\cdot\frac{4k}{3}}=3$，当且仅当$\frac{1}{3k}=\frac{4k}{3}$，即$k=\frac{1}{2}$，亦即$x=1,y=2$时不等式取等号。故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：这里实质也是“消元”，不过针对这个问题，间接消元法（解法3）比直接消元法（解法2）要简洁许多。

解法4：（三角换元法）依题意可设$x=3\sin^2\theta$，$y=3\cos^2\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。于是$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3\sin^2\theta}+\frac{4}{3\cos^2\theta}=\frac{1}{3}(5+4\tan^2\theta+\cot^2\theta)\geqslant\frac{1}{3}(5+2\sqrt{4\tan^2\theta\cdot\cot^2\theta})=3$，当且仅当$4\tan^2\theta=\cot^2\theta$，即$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$时不等式取等号。故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：实施三角换元之后，应熟练掌握的常用变形是：$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$，$\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$。

解法5：（解析法）设$a=\frac{1}{x}>0$，$b=\frac{4}{y}>0$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=3$，目标即求$a+b$的最小值。

由已知，直线l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$过定点$\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$，$a$，$b$分别是直线$l$在$x$轴和$y$轴上的截距。设直线$l$的斜率为$k$，则$k<0$，于是直线$l$的方程为$y-\frac{4}{3}=k\left(x-\frac{1}{3}\right)$，分别令$x=0,y=0$求得截距$b=\frac{4-k}{3}$，$a=\frac{k-4}{3k}$，从而$a+b=\frac{k-4}{3k}+\frac{4-k}{3}=\frac{5}{3}+\left(-\frac{4}{3k}\right)+\left(-\frac{k}{3}\right)\geqslant\frac{5}{3}+2\sqrt{\left(-\frac{4}{3k}\right)\cdot\left(-\frac{k}{3}\right)}=3$，当且仅当$-\frac{4}{3k}=-\frac{k}{3}$，即$k=-2$时不等式取等号。故$a+b$的最小值为3，即$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：这种解法尽管麻烦一些，但沟通了代数与几何的紧密联系，突出体现了“数形结合法”在解题中的灵活应用。

解法6：（向量法）设向量$\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{\frac{1}{x}},\sqrt{\frac{4}{y}}\right)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{x},\sqrt{y})$，则由$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$得$\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{4}{y}}\cdot\sqrt{x+y}\geqslant\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{\frac{4}{y}}\cdot\sqrt{y}=3$，从而$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=3$，当且仅当向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线且同向，进一步分析可知即$x=1$，$y=2$时不等式取等号。故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：向量不等式$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是证明或求解不等式问题的一把利器，这种解法的难点在于灵活构造两个能够解决目标问题的平面向量。

解法7：（判别式法）设$a=\frac{1}{x}>0$，$b=\frac{4}{y}>0$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=3$，目标即求$a+b$的最小值。

设$a+b=t$，则$b=t-a$，代入$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=3$，整理得$3a^2+(3-3t)a+t=0$。意到$t>0$，这个关于$a$的方程要有正数解，则判别式$\Delta=9t^2-30t+9\geqslant0$，解得$t\leqslant\frac{1}{3}$或$t\geqslant3$，且相应二次函数图像的对称轴$a=\frac{t-1}{2}>0$，即$t>1$，从而可知$t\geqslant3$。故$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为3。

评注：利用“判别式法”解题的关键是等价转化目标问题，同时要注意结合二次函数的图像作进一步的分析处理。

综上，理解并掌握好以上几种解法，不但有利于学生巩固所学知识、方法在解题中的灵活运用，而且有利于拓宽解题视野，提高解题能力。