

北京市丰台区 2023~2024 学年度第二学期综合练习（二）

高三数学参考答案

2024.04

第一部分（选择题 共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	C	A	C	B	D	B	A	C	A	D

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 1

(12) 12

(13) 4

(14) ①，假；或②，真

(15) ②③④

注：(15) 题给出的结论中有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

(16) (本小题 14 分)

解：(I) 因为 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$,

$$\text{所以 } \sin(A + \frac{\pi}{6}) = 1.$$

因为 $0 < A < \pi$,

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 6\text{分}$$

(II) 若选择①②，

在 $\triangle ABC$ 中， $0 < B < \pi$,

$$\text{因为 } \cos B = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{由 (I) 知 } A = \frac{\pi}{3},$$

所以 $\sin A < \sin B$,所以 $a < b$ ，与 $a - b = 2$ 矛盾，此时不存在符合题意的 $\triangle ABC$ 。

若选择①③，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$$\text{得 } a^2 = (a-2)^2 + 64 - 16(a-2)\cos\frac{\pi}{3},$$

解得 $a=7$,

所以 $b=5$.

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

若选择②③,

在 $\triangle ABC$ 中, $0 < B < \pi$,

$$\text{因为 } \cos B = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{又因为 } A = \frac{\pi}{3}, \quad A + B + C = \pi,$$

$$\text{所以 } \sin C = \sin(A + B)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} \cos B + \cos \frac{\pi}{3} \sin B$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理可得 } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = 4\sqrt{7},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{7} \times 8 \times \frac{3\sqrt{21}}{14} = 24\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

(17) (本小题 14 分)

解: (I) 连结 D_1F, EF, BC_1 .

在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

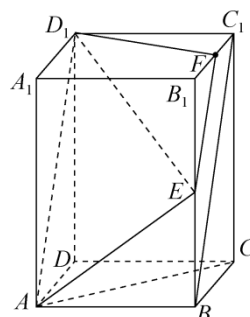
$AB \parallel C_1D_1$, $AB = C_1D_1$.

所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形,

所以 $AD_1 \parallel BC_1$.

因为 $AD_1 \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AD_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .



因为 B_1C_1 与平面 AD_1E 交于点 F ,
 所以平面 $AD_1E \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = EF$.

因为 $AD_1 \subset$ 平面 AD_1E ,
 所以 $AD_1 \parallel EF$.

所以 $EF \parallel BC_1$.

在 $\triangle BB_1C_1$ 中, 因为点 E 是 BB_1 的中点,

所以点 F 是 B_1C_1 的中点. 5 分

(II) 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 建立如图所示空间直角坐标系 $D - xyz$.

设 $DD_1 = 2t (t > 0)$, 由 $AB = 1$, 得 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 2t), E(1, 1, t), C(0, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = (0, 1, t), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 2t), \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$.

设平面 AD_1E 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} -x + 2tz = 0 \\ y + tz = 0 \end{cases} .$$

令 $z = 1$, 得 $x = 2t, y = -t$,

所以 $\mathbf{n} = (2t, -t, 1)$.

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{AC}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AC}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2t - t}{\sqrt{2} \times \sqrt{4t^2 + t^2 + 1}} .$$

因为 AC 与平面 AD_1E 所成角为 $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以} \left| \frac{-2t - t}{\sqrt{4t^2 + t^2 + 1} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

解得 $t = 1$,

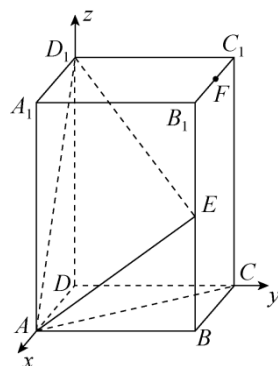
所以平面 AD_1E 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$.

由题可知, 平面 AA_1D_1 的法向量为 $\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$.

$$\text{因为} \cos \langle \overrightarrow{DC}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{DC}| |\mathbf{n}|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} ,$$

由题可知, 二面角 $A_1 - AD_1 - F$ 为锐二面角,

所以二面角 $A_1 - AD_1 - F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



.....14 分

(18) (本小题 13 分)

解: (I) 设事件 $A =$ “解密信息的单光子的偏振状态与原始信息的单光子的偏振状态相

同”, 则 $P(A) = \frac{1}{3}$ 3 分

(II) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以, X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1. \quad \text{.....10 分}$$

(III) $a < c < b$ 13 分

(19) (本小题 14 分)

解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x + 2\sqrt{x} - 2\ln x$, $f(1) = 3$;

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \quad f'(1) = 0;$$

故切线方程为 $y = 3$ 4 分

(II) 函数 $f(x) = a^2x + 2a\sqrt{x} - 2\ln x (a \neq 0)$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$;

$$f'(x) = a^2 + \frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{a^2x + a\sqrt{x} - 2}{x} = \frac{(a\sqrt{x} + 2)(a\sqrt{x} - 1)}{x}.$$

①当 $a > 0$ 时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{1}{a^2})$	$\frac{1}{a^2}$	$(\frac{1}{a^2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 极小值为 $f(\frac{1}{a^2}) = a^2 \cdot \frac{1}{a^2} + 2a \cdot \frac{1}{a} - 2\ln \frac{1}{a^2} = 3 + 4\ln a$.

函数 $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $f(\frac{1}{a^2}) = 3 + 4\ln a < 0$, 解得 $0 < a < e^{-\frac{3}{4}}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $a^2x + 2a\sqrt{x} \rightarrow 0$, $-2\ln x \rightarrow +\infty$, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $a^2x + 2a\sqrt{x} \rightarrow +\infty$, $-2\ln x \rightarrow -\infty$, 当自变量 x 越来越大时, 函数 $y = 2\ln x$ 的增长速度相对函数 $y = a^2x + 2a\sqrt{x}$ 的增长速度要慢, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$.

所以 $0 < a < e^{-\frac{3}{4}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.

②当 $a < 0$ 时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \frac{4}{a^2})$	$\frac{4}{a^2}$	$(\frac{4}{a^2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$ 极小值为 $f(\frac{4}{a^2}) = a^2 \cdot \frac{4}{a^2} + 2a \cdot (-\frac{2}{a}) - 2\ln \frac{4}{a^2} = -2\ln \frac{4}{a^2}$.

函数 $f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $f(\frac{4}{a^2}) = -2\ln \frac{4}{a^2} < 0$, 解得 $-2 < a < 0$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $a^2x + 2a\sqrt{x} \rightarrow 0$, $-2\ln x \rightarrow +\infty$, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $a^2x \rightarrow +\infty$, $2a\sqrt{x} - 2\ln x \rightarrow -\infty$, 当自变量 x 越来越大时, 函数 $y = -2a\sqrt{x} + 2\ln x$ 的增长速度相对函数 $y = a^2x$ 的增长速度要慢, 从而 $f(x) \rightarrow +\infty$.

所以 $-2 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点;

综上所述, a 的取值范围为 $(-2, 0) \cup (0, e^{-\frac{3}{4}})$.

.....14 分

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 因为动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2|F_1F_2| = 4 > |F_1F_2|$, 所以曲线 Ω 为以点 F_1, F_2 为焦点的椭圆, 且 $2a = 4$, $c = 1$, 即 $a = 2$, $c = 1$;
又因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 故 $b = \sqrt{3}$.

所以曲线 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

.....5 分

(II) 解法 1:

当直线 MN 斜率不存在时, $M(1, \frac{3}{2})$, $N(1, -\frac{3}{2})$, 可求得 $P(4, 3)$, 不符合题意;

当直线 MN 斜率存在时, 设直线 MN 方程为 $y = k(x-1)$;

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{得 } (4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_p, y_p)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, \quad x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3};$$

直线 AM 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$; 直线 BN 方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$;

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \end{cases}$$

$$\text{得 } \frac{x_p + 2}{x_p - 2} = \frac{y_2(x_1 + 2)}{y_1(x_2 - 2)} = \frac{k(x_2 - 1)(x_1 + 2)}{k(x_1 - 1)(x_2 - 2)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 2}{x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}$$

$$= \frac{\frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3} + 2 - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} - 3x_1 - 2}{\frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2}{4k^2 + 3} - x_1 + 2} = \frac{\frac{12k^2 - 18}{4k^2 + 3} - 3x_1}{\frac{4k^2 - 6}{4k^2 + 3} - x_1} = 3.$$

解得 $x_p = 4$, 可得 $x_2 = 0$,

所以点 N 的横坐标为 0.

.....15 分

解法 2:

$$\text{设直线 } MN \text{ 方程为 } x = my + 1, \text{ 联立} \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_p, y_p)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4};$$

直线 AM 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$; 直线 BN 方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$;

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases} \quad \text{得 } y_p = \frac{4y_1y_2}{(x_1+2)y_2 - (x_2-2)y_1};$$

$$\text{因为 } y_p = -y_2, \text{ 所以 } \frac{4y_1y_2}{(x_1+2)y_2 - (x_2-2)y_1} = -y_2;$$

所以

$$4y_1 = (x_2-2)y_1 - (x_1+2)y_2 = (my_2+1-2)y_1 - (my_1+1+2)y_2 = -y_1 - 3y_2;$$

$$\text{得 } 5y_1 = -3y_2; \text{ 即 } y_1 = -\frac{3}{5}y_2, \text{ 代入 } y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2+4}, \text{ 得 } y_2 = -\frac{15m}{3m^2+4},$$

$$\text{代入 } y_1y_2 = -\frac{9}{3m^2+4}, \text{ 得 } -\frac{3}{5}y_2^2 = -\frac{9}{3m^2+4};$$

$$\text{即 } -\frac{3}{5}\left(-\frac{15m}{3m^2+4}\right)^2 = -\frac{9}{3m^2+4}, \text{ 得到 } m^2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \pm\sqrt{3};$$

$$\text{得 } x_2 = 0.$$

所以点 N 的横坐标为 0.

.....15 分

(21) (本小题 15 分)

解: (I) 数列 A_3 的前 2 项为 3, 8; 数列 A_4 的前 2 项为 5, 11; 4 分

(II) 首先 $f(1, n) = n^2$, 当 $n \geq 2$ 时, $f(1, n) - f(1, n-1) = 2n-1$ 结论成立;

当 $m \geq 2$ 时, 对于相邻的两个数列:

$$A_{m-1}: f(m-1, 1), f(m-1, 2), \dots, f(m-1, n-1), f(m-1, n), \dots,$$

$$A_m: f(m, 1), f(m, 2), \dots, f(m, n-1), f(m, n), \dots,$$

因为 $f(m, n-1), f(m-1, n)$ 都在数列 N_{m-2} 中,

且 $f(m, n-1)$ 在 $f(m-1, n)$ 之前,

所以

$$f(m, n-1) < f(m-1, n) \text{ 在数列 } A_{m-1}, A_m \text{ 中},$$

$$\text{必有 } f(m-1, n) < f(m, n),$$

$$\text{所以 } f(m, n-1) < f(m-1, n) < f(m, n),$$

所以

$$f(m, n) - f(m, n-1) = f(m-1, n) - f(m-1, n-1) + 1$$

$$\text{所以 } \{f(m, n) - f(m, n-1)\} \text{ 构成首项为 } f(1, n) - f(1, n-1) = 2n-1,$$

公差为 1 的等差数列,

$$\text{所以 } f(m, n) - f(m, n-1) = (2n-1) + (m-1) = 2n+m-2. \quad \text{.....9 分}$$

1	4	9	16	25	36	49	64
2	6	12	20	30	42	56	72
3	8	15	24	35	48	63	80
5	11	19	29	41	55	71	89
7	14	23	34	47	62	79	98
10	18	28	40	54	70	88	108
13	22	33	46	61	78	97	118
17	27	39	53	69	87	107	129

(III) 由各个数列生成的规则知, $\{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+2n\}$ 中不可能有两个元素是同一数列的项. 从上面的表格, 我们猜想: 集合 $\{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+2n\}$ 中的每个元素, 是且仅是数列 $A_2, A_3, \dots, A_{2n+1}$ 中某个数列的项. 具体地可概括成结论

P: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*, i \in \mathbf{N}, i \leq n-1$, 有

$$f(2n-2i, i+1) = n^2 + i + 1, f(2n+1-2i, i+1) = n^2 + n + i + 1.$$

下面用数学归纳法证明:

(1) 当 $n=1$ 时, $f(2,1)=2, f(3,1)=3$, 由题意数列 A_2, A_3 的首项分别是 2, 3, 结论成立;

(2) 假设当 $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 结论成立, 即对 $\forall i \in \mathbf{N}, i \leq k-1$,

$$f(2k-2i, i+1) = k^2 + i + 1, f(2k+1-2i, i+1) = k^2 + k + i + 1$$

那么由第(II)问的结论知: 当 $i \in \mathbf{N}, i \leq k-1$ 时,

$$f(2k-2i, i+2) = f(2k-2i, i+1) + 2(i+2) + (2k-2i) - 2$$

$$= (k^2 + i + 1) + 2k + 2 = (k+1)^2 + i + 2$$

$$f(2k+1-2i, i+2) = f(2k+1-2i, i+1) + 2(i+2) + [2k+1-2i] - 2$$

$$= (k^2 + k + i + 1) + (2k+3) = (k+1)^2 + (k+1) + i + 2$$

上式表明, 集合 $\{(k+1)^2+1, (k+1)^2+2, \dots, (k+1)^2+2(k+1)\}$ 中除了

$(k+1)^2+1, (k+1)^2+(k+2)$ 的每一个元素都是数列 $A_2, A_3, \dots, A_{2k+1}$ 中的某个数列

的项, 还剩下两个元素: $(k+1)^2+1, (k+1)^2+(k+2)$, 它们必是数列 A_{2k+2}, A_{2k+3}

的首项, 结果只有 $f(2k+2,1) = (k+1)^2+1, f(2k+3,1) = (k+1)^2+(k+1)+1$.

根据(1)(2)知, 结论 P 成立.

由结论 P 可得, 数列 A_{2k} 的首项为 k^2+1 , A_{2k+1} 的首项为 k^2+k+1 ,

$$\text{即 } f(m,1) = \begin{cases} \frac{m^2}{4} + 1, m \text{ 为偶数,} \\ \frac{(m-1)^2}{4} + \frac{m-1}{2} + 1, m \text{ 为奇数,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{m^2}{4} + 1, m \text{ 为偶数,} \\ \frac{m^2-1}{4} + 1, m \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

另一方面, 由第(II)问的结论: $f(m,n) - f(m,n-1) = 2n+m-2$ 得:

$$f(m,2) - f(m,1) = m+2,$$

$$f(m,3) - f(m,2) = m+4,$$

...

$$f(m,n) - f(m,n-1) = 2n+m-2,$$

相加得: $f(m,n) = 2+4+\dots+(2n-2) + (n-1)m = (n-1)(n+m) + f(m,1)$,

当 $n=1$ 时, 上式也成立.

所以

$$f(m, n) = \begin{cases} (\frac{m^2}{4} + 1) + (n-1)(n+m), & m \text{ 为偶数}, \\ (\frac{m^2-1}{4} + 1) + (n-1)(n+m), & m \text{ 为奇数}. \end{cases} = \begin{cases} (\frac{m}{2} + n - 1)^2 + n, & m \text{ 为偶数}, \\ (\frac{m}{2} + n - 1)^2 + n - \frac{1}{4}, & m \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

令 $(\frac{m}{2} + n - 1)^2 + n = 108$, 则 $(\frac{m}{2} + n - 1)^2 = 108 - n$, 所以 $\frac{m}{2} = \sqrt{108 - n} - (n - 1)$.

由 $\frac{m}{2} \geq 1$ 得 $n^2 + n \leq 108$, 所以 $n \leq 9$, 所以 $108 - n \in [99, 107]$, 所以 $\sqrt{108 - n} = 10$.

所以 $n = 8$, 此时 $\sqrt{108 - 8} - (8 - 1) = 3$, 所以 $m = 6$;

令 $(\frac{m}{2} + n - 1)^2 + n - \frac{1}{4} = 108$, 有 $(m + 2n - 2)^2 = 433 - 4n$, $m = \sqrt{433 - 4n} + 2 - 2n$.

由 $m \geq 1$ 得 $n^2 \leq 108$, 所以 $n \leq 10$.

所以 $433 - 4n \in (393, 429)$, 所以 $\sqrt{433 - 4n} \notin \mathbf{N}^*$, 无解.

综上, 当 $f(m, n) = 108$ 时, $m = 6, n = 8$ 15 分