

高三数学

2024.4

本试卷共 9 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则 $(C_U A) \cap (C_U B) =$

- A. $\{3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点为 $Z(1, -1)$ ，则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 $p, q \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{p+q} = a_p a_q$ ，若 $a_1 = \sqrt{2}$ ，则 $a_4 =$

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

4. 下列函数中，是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

- A. $f(x) = \frac{1}{|x|}$ B. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ C. $f(x) = \sin x$ D. $f(x) = \tan x$

5. 若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，且 $a > b$ ，则

- A. $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{b^2+1}$ B. $a^2b > ab^2$
C. $a^2 > ab > b^2$ D. $a > \frac{a+b}{2} > b$

6. 已知 α, β 是两个不同的平面， m, n 是两条不同的直线，能使 $m \perp n$ 成立的一组条件是

- A. $\alpha // \beta$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ B. $\alpha // \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \perp \beta$
C. $\alpha \perp \beta$ ， $m \perp \alpha$ ， $n // \beta$ D. $\alpha \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n // \beta$

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的导函数是 $f'(x)$ ，如果函数

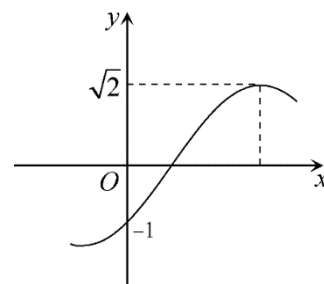
$y = f(x) - f'(x)$ 的图象如右图所示，那么 ω, φ 的值分别为

A. 1, 0

B. 1, $-\frac{\pi}{4}$

C. 1, $\frac{\pi}{4}$

D. 2, $-\frac{\pi}{4}$



8. 已知曲线 $C: |y| = x^2 + 1$ 与直线 $l: y = kx + b$ ，那么下列结论正确的是

A. 当 $k=1$ 时，对于任意的 $b \in \mathbf{R}$ ，曲线 C 与直线 l 恰有两个公共点

B. 当 $k=1$ 时，存在 $b \in \mathbf{R}$ ，曲线 C 与直线 l 恰有三个公共点

C. 当 $k=2$ 时，对于任意的 $b \in \mathbf{R}$ ，曲线 C 与直线 l 恰有两个公共点

D. 当 $k=2$ 时，存在 $b \in \mathbf{R}$ ，曲线 C 与直线 l 恰有三个公共点

9. 已知等差数列 $\{\alpha_n\}$ 的公差为 d ，首项 $\alpha_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，那么 “ $d = \pi$ ” 是 “集合

$S = \{x | x = \sin \alpha_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 恰有两个元素” 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. “用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当圆锥的轴与截面所成的角不同时，可以得到不同的截口曲线”. 利用这个原理，小明在家里用两个射灯（射出的光锥视为圆锥）在墙上投影出两个相同的椭圆（图1），光锥的一条母线恰好与墙面垂直. 图2是一个射灯投影的直观图，圆锥 PO 的轴截面 APB 是等边三角形，椭圆 O_1 所在平面为 α ， $PB \perp \alpha$ ，则椭圆 O_1 的离心率为



图 1

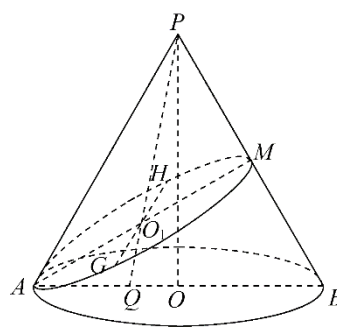


图 2

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

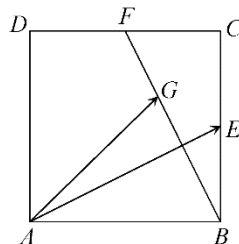
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知函数 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = \log_2(x+1)$ ，那么 $f(g(0)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 若 $(\sqrt{2}+1)^4 = 17 + a\sqrt{2}$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ，点 E, F 分别为 BC, CD 的中点，点 G 在 BF 上，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

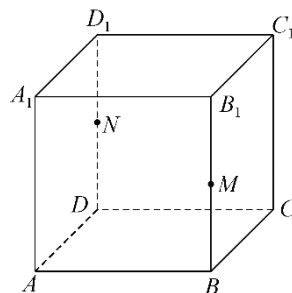


14. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， M, N 分别为 BB_1, DD_1 的中点， α 为过直线 MN 的平面. 从下列结论①、②中选择一个，并判断该结论的真假. 你选的结论是 （填“①”或“②”），该结论是 命题（填“真”或“假”）。

①平面 α 截该正方体所得截面面积的最大值为 $3\sqrt{3}$ ；

②若正方体的 12 条棱所在直线与平面 α 所成的角都等于 θ ，

则 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |x+m|, & x < 0 \\ -\frac{\sqrt{2}m}{2}\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，给出下列四个结论：

①当 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减；

②若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则 $m > 0$ ；

③当 $m < 0$ 时，若存在实数 a, b ，使得 $f(a) = f(b)$ ，则 $|a-b|$ 的取值范围为 $(2, +\infty)$ ；

④已知点 $P(-m, 0)$ ，函数 $f(x)$ 的图象上存在两点 $Q_1(x_1, y_1)$ ， $Q_2(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2 < 0$)， Q_1, Q_2 关于坐标原点 O 的对称点也在函数 $f(x)$ 的图象上. 若 $|PQ_1| + |PQ_2| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，则 $m=1$ 。

其中所有正确结论的序号是 。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

已知 $\triangle ABC$ 满足 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$.

(I) 求 A ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 满足条件①、条件②、条件③的两个，请选择一组这样的两个条件，并求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a - b = 2$;

条件②: $\cos B = \frac{\sqrt{7}}{14}$;

条件③: $c = 8$.

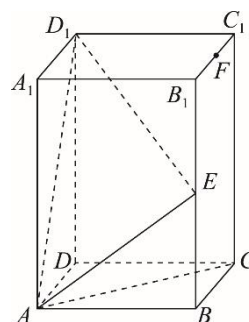
注: 如果选择的一组条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多组符合要求的条件分别解答, 按第一组解答计分.

17. (本小题 14 分)

在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, E 为 BB_1 中点, 直线 B_1C_1 与平面 AD_1E 交于点 F .

(I) 证明: F 为 B_1C_1 的中点;

(II) 若直线 AC 与平面 AD_1E 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 求二面角 A_1-AD_1-F 的余弦值.



18. (本小题 13 分)

激光的单光子通讯过程可用如下模型表述：发送方将信息加密后选择某种特定偏振状态的单光子进行发送. 在信息传输过程中，若存在窃听者，由于密码本的缺失，窃听者不一定能正确解密并获取准确信息.

某次实验中，假设原始信息的单光子的偏振状态 0,1,2,3 等可能地出现，原始信息的单光子的偏振状态与窃听者的解密信息的单光子的偏振状态有如下对应关系.

原始信息的单光子的偏振状态	0	1	2	3
解密信息的单光子的偏振状态	0,1,2	0,1,3	1,2,3	0,2,3

已知原始信息的任意一种单光子的偏振状态，对应的窃听者解密信息的单光子的偏振状态等可能地出现.

(I) 若发送者发送的原始信息的单光子的偏振状态为 1，求窃听者解密信息的单光子的偏振状态与原始信息的单光子的偏振状态相同的概率；

(II) 若发送者连续三次发送的原始信息的单光子的偏振状态均为 1，设窃听者解密信息的单光子的偏振状态为 1 的个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$ ；

(III) 已知发送者连续三次发送信息，窃听者解密信息的单光子的偏振状态均为 1. 设原始信息的单光子只有一种偏振状态的可能性为 a ，有两种偏振状态的可能性为 b ，有三种偏振状态的可能性为 c ，试比较 a, b, c 的大小关系. (结论不要求证明)

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = a^2x + 2a\sqrt{x} - 2\ln x$ ($a \neq 0$).

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

20. (本小题 15 分)

已知两点 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 曲线 Ω 上的动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2|F_1F_2|$, 直线 MF_2 与曲线 Ω 交于另一点 N .

(I) 求曲线 Ω 的方程;

(II) 设曲线 Ω 与 x 轴的交点分别为 A, B (点 A 在点 B 的左侧, 且 M 不与 A, B 重合), 直线 AM 与直线 BN 交于点 P . 当点 B 为线段 NP 的中点时, 求点 N 的横坐标.

21. (本小题 15 分)

将正整数数列 $N_0: 1, 2, 3, 4, \dots$ 中项数为平方数的项依次选出构成数列 $A_1: 1, 4, 9, 16, \dots$, 此时数列 N_0 中剩下的项构成数列 $N_1: 2, 3, 5, 6, \dots$; 再将数列 N_1 中项数为平方数的项依次选出构成数列 $A_2: 2, 6, 12, 20, \dots$, 剩下的项构成数列 $N_2: \dots$, 如此操作下去, 将数列 $N_{k-1} (k \in \mathbf{N}^*)$ 中项数为平方数的项依次选出构成数列 A_k , 剩下的项构成数列 N_k .

(I) 分别写出数列 A_3, A_4 的前 2 项;

(II) 记数列 A_m 的第 n 项为 $f(m, n)$. 求证: 当 $n \geq 2$ 时, $f(m, n) - f(m, n-1) = 2n + m - 2$;

(III) 若 $f(m, n) = 108$, 求 m, n 的值.