

昌平区 2024 年高三年级第二次统一练习

数学试卷

2024. 5

本试卷共 9 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x > 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 3\}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n$ ， $a_2 = 4$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和等于

- A. 16 B. 24 C. 30 D. 62

3. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点和双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右顶点重合，则 p 的值为

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

4. 在 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

- A. -15 B. 15 C. 30 D. 360

5. 若 $0 < a < b < 1$ ， $c > 1$ ，则

- A. $c^b < c^a$ B. $\log_c a > \log_c b$ C. $\sin \frac{c}{a} > \sin \frac{c}{b}$ D. $a^c < b^c$

6. 若圆 $x^2 + 8x + y^2 - 6y + m = 0$ 与 x 轴， y 轴均有公共点，则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, 9]$ B. $(-\infty, 16]$ C. $[9, 25)$ D. $[16, 25)$

7. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $m \subset \alpha$, $\alpha // \beta$, 则 “ $n \perp \beta$ ” 是 “ $n \perp m$ ” 的

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 若对任意的 x 都有 $|f(x)| \geq ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$
B. $[-4, 0]$
C. $[-3, 0]$
D. $(-\infty, 2]$

9. 中国茶文化博大精深, 茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 经验表明, 某种绿茶用 90°C 的水泡制, 再等到茶水温度降至 60°C 时饮用, 可以产生最佳口感. 在 20°C 室温下, 茶水温度从 90°C 开始, 经过 t min 后的温度为 $y^\circ\text{C}$, 可选择函数 $y = 60 \times 0.9^t + 20$ ($t \geq 0$) 来近似地刻画茶水温度随时间变化的规律. 则在上述条件下, 该种绿茶茶水达到最佳饮用口感时, 需要放置的时间最接近的是

(参考数据: $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$)

- A. 2.5 min
B. 4.5 min
C. 6 min
D. 8 min

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{4n-3} = -1$, $a_{4n-1} = 1$, $a_{2n} = a_n$, 该数列的前 n 项和为 S_n , 则下列论断中错误的是

- A. $a_{31} = 1$
B. $a_{2024} = -1$
C. $\exists$ 非零常数 T , $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_{n+T} = a_n$
D. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $S_{2^n} = -2$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 已知复数 $z = \frac{1+i}{i}$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

12. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=4$, $b=2c$, $\cos A = -\frac{3}{4}$, 则 $S_{\triangle ABC} =$ _____.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ($\lambda > 0$). 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时,
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____; 当 $\lambda =$ _____ 时, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{DP}$ 取得最大值.

14. 已知 p : 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的图像是一条连续不断的曲线, 若 $f(1) \cdot f(2) > 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内无零点. 能说明 p 为假命题的一个函数的解析式是 _____.

15. 已知曲线 $G: x|x| + y|y| = 4$, O 为坐标原点. 给出下列四个结论:

- ① 曲线 G 关于直线 $y=x$ 成轴对称图形;
- ② 经过坐标原点 O 的直线 l 与曲线 G 有且仅有一个公共点;
- ③ 直线 $l: x+y=2$ 与曲线 G 所围成的图形的面积为 $\pi-2$;
- ④ 设直线 $l: y=kx+2$, 当 $k \in (-1, 0)$ 时, 直线 l 与曲线 G 恰有三个公共点.

其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \cos x(\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x) - a$ 的图像经过点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$.

(I) 求实数 a 的值, 并求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(II) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

17. (本小题 14 分)

如图, 在棱长均为 2 的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是 CC_1 的中点, BC 交平面 AD_1E 于点 F .

(I) 求证: 点 F 为线段 BC 的中点;

(II) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 使得四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 存在且唯一确定.

(i) 求二面角 D_1-AF-B 的余弦值;

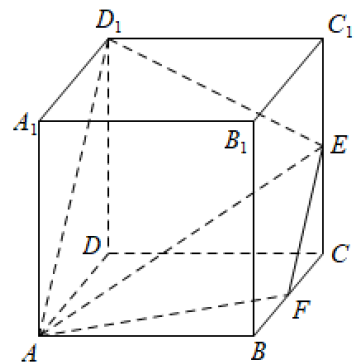
(ii) 求点 B_1 到平面 AD_1EF 的距离.

条件①: $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$;

条件②: 四边形 $ABCD$ 是正方形;

条件③: 平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 CC_1D_1D .

注: 如果选择的条件不符合要求, 则第 (II) 问得 0 分; 如果选择多组符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.



18. (本小题 13 分)

某行业举行专业能力测试, 该测试由 A, B, C 三项组成, 每项测试成绩分为合格和不合格, 三项测试结果相互独立. 当三项测试成绩均合格时, 认定分为 10 分; 当 C 项测试成绩合格, 且 A, B 两项中恰有一项成绩合格时, 认定分为 5 分; 当 C 项测试成绩不合格, 且 A, B 两项测试成绩都合格时, 认定分为 2 分; 其它测试成绩, 认定分为 0 分.

甲在参加该专业能力测试前进行了 20 次模拟测试, 测试成绩合格的频数统计如下表:

测试项	A	B	C
频数	16	15	10

用频率估计概率.

(I) 试估计甲参加该专业能力 A 项测试成绩合格的概率;

(II) 设 X 表示甲获得的认定分, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(III) 若乙参加该专业能力测试, 三项测试成绩合格的概率均为 $\frac{2}{3}$. 试估计甲、乙两人获得认定分的大小, 并说明理由.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设 A, B 是椭圆 E 的左、右顶点, F 是椭圆 E 的右焦点. 过点 F 的直线 l 与椭圆 E 相交于 M, N 两点 (点 M 在 x 轴的上方), 直线 AM, BN 分别与 y 轴交于点 P, Q , 试判断 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 是否为定值? 若是定值, 求出这个定值; 若不是定值, 说明理由.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{e^x}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值;

(III) 若 $a > 0$, 当 $x > 0$ 时, 求证: $f(\ln a - x) > f(\ln a + x)$.

21. (本小题 15 分)

已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_N$ 为有穷正整数数列, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$, 且 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_N$. 从 Q 中选取第 i_1 项, 第 i_2 项, $\dots$, 第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$), 称数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 Q 的长度为 m 的子列. 规定: 数列 Q 的任意一项都是 Q 的长度为 1 的子列.

若对于任意的正整数 $t \leq s$, 数列 Q 存在长度为 m 的子列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$, 使得 $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m} = t$, 则称数列 Q 为全覆盖数列.

(I) 判断数列 1,1,1,5 和数列 1,2,4,8 是否为全覆盖数列;

(II) 在数列 Q 中, 若 $s \leq 2N - 1$, 求证: 当 $2 \leq n \leq N$ 时, $a_n \leq n \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$;

(III) 若数列 Q 满足: $a_1 = 1$, 且当 $2 \leq n \leq N$ 时, $a_n \leq n \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$,

求证: 数列 Q 为全覆盖数列.