福州一中高二数学开学前质检

一、单项选择题：本题共7小题，每小题4，共28分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知 $A=\left\{x\left|3^x<1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2-x-6>0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-2,0)$　　B．$(-3,0)$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$(-\infty,-3)$

【答案】C

【解析】

【分析】

利用指数函数的单调性求出集合A，利用一元二次不等式的解法求出集合B，再由集合的交运算求解即可．

【详解】因为指数函数 $y=3^x$ 在 R 上为增函数，

所以 $3^x<1=3^0$，解得 $x<0$，所以集合 $A=\left\{x\left|x<0\right.\right\}$，

由一元二次不等式解法知，集合 $B=\left\{x\left|x>3\text{ 或 }x<-2\right.\right\}$，

由集合的交运算知，$A\cap B=\left\{x\left|x<-2\right.\right\}$．

故选:C

【点睛】本题考查利用指数函数的单调性解不等式、一元二次不等式解法和集合的交运算；考查运算求解能力；属于基础题．

2．已知 $\dfrac{(1-i)^2}{z}=1+i$（i为虚数单位），则复数 $z=$

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

【答案】D

【解析】

【详解】试题分析：由 $\dfrac{(1-i)^2}{z}=1+i$，得 $z=\dfrac{(1-i)^2}{1+i}=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-1-i$，故选D．

考点：复数的运算．

3. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm 2x$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】

由双曲线的渐近线方程求出a,b的关系式，结合a,b,c之间的关系求出离心率即可.

【详解】因为双曲线C的渐近线方程为$y=\pm 2x$，

所以$\frac{b}{a}=2$，即$b=2a$，因为$c^2=a^2+b^2$，

所以$c=\sqrt{5}a$，所以所求离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

故选:B

【点睛】本题考查双曲线方程及其几何性质；考查运算求解能力；属于基础题.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$中，a_1，a_{101}是方程$x^2-10x+16=0$的两根，则$a_{21}\cdot a_{51}\cdot a_{81}$的值为（　　）

A. 64　　B. ± 64　　C. 256　　D. ± 256

【答案】A

【解析】

【分析】

利用韦达定理和等比数列的性质，结合等比数列通项公式求出a_{51}，再利用等比数列的性质即可求解.

【详解】因为a_1，a_{101}是方程$x^2-10x+16=0$的两根，

所以由韦达定理可得，$a_1\cdot a_{101}=16, a_1+a_{101}=10$，

即$a_1\left(1+q^{100}\right)=10$，所以$a_1>0$，

由等比数列的性质知，$a_1\cdot a_{101}=a_{21}\cdot a_{81}={a_{51}}^2=16$，

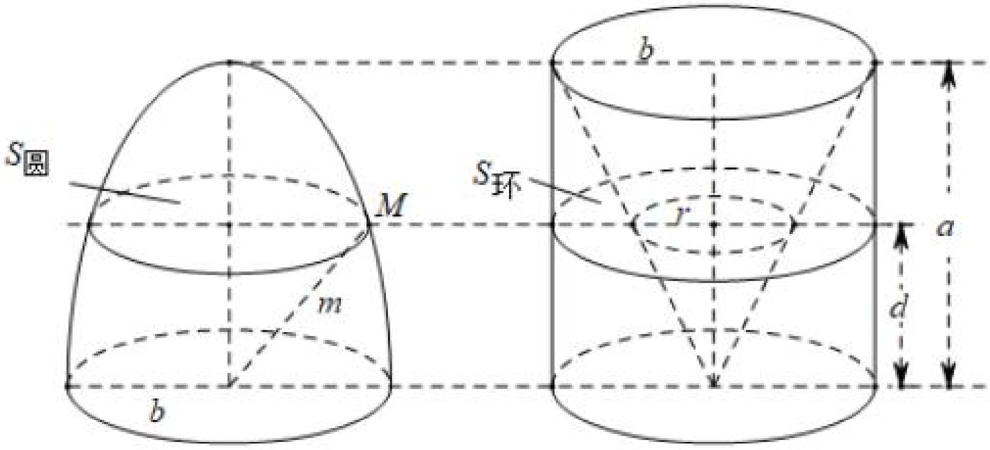
因为$a_{51}=a_1\cdot q^{50}>0$，所以$a_{51}=4$，

所以$a_{21}\cdot a_{51}\cdot a_{81}=64$.

故选:A

【点睛】本题考查等比数列的性质和通项公式；考查运算求解能力；利用韦达定理和等比数列的性质正确求出 a_{51} 的值是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

5. 祖暅（公元前 5-6 世纪），祖冲之之子，是我国齐梁时代的数学家．他提出了一条原理：“幂势既同，则积不容异．”这句话的意思是两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等，该原理在西方直到十七世纪才由意大利数学家卡瓦列利发现，比祖暅晚一千一百多年．椭球体是椭圆绕其轴旋转所成的旋转体．如图将底面直径皆为 2b，高皆为 a 的椭半球体及已被挖去了圆锥体的圆柱体放置于同一平面 β 上．以平行于平面 β 的平面距平面 β 任意高 d 处可横截得到 $S_{圆}$ 及 $S_{环}$ 两截面，可以证明 $S_{圆}=S_{环}$ 总成立．据此，短轴长为 4，长轴长为 6 的椭球体的体积是（）.



A. 8π　　B. 12π　　C. 16π　　D. 24π

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意，$S_{圆}=S_{环}$ 总成立可知，椭半球体的体积等于圆柱的体积减去圆锥的体积，利用圆柱、圆锥的体积公式即可求解.

【详解】根据题意，由椭圆的短轴长为 4，长轴长为 6 可知,

圆柱的高为 $h=3$，底面半径 $r=2$，

由圆柱和圆锥的体积公式，结合题中结论知，

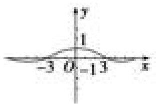
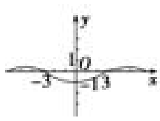
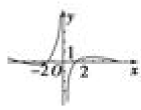
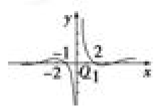
$V_{椭球体}=2\left(V_{圆柱}-V_{圆锥}\right)=2\left(\pi r^2 h-\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$,

即 $V_{椭球体}=2\left(\pi\times 2^2\times 3-\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 3\right)=16\pi$.

故选:C

【点睛】本题考查数学文化、圆柱和圆锥的体积公式；考查运算求解能力、知识迁移能力和空间想象能力；灵活运用题中原理的含义是求解本题的关键;属于中档题.

6. 函数 $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{x}$ 的图象大致为

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】D

【解析】

【详解】因为 $f(-x)=\frac{\cos(-x)}{-x}=\frac{\cos x}{-x}=-f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点成中心对称，排除答案 A、B，当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty,\cos x\to 1$ ，所以 $\frac{\cos x}{x}\to+\infty$ ，排除 C，故选 D.

7. 若函数 $f\left(x\right)=e^x\left(\sin x+a\cos x\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,1\right]$　　B. $\left(-\infty,1\right)$　　C. $\left[1,+\infty\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】

求出导函数 $f'\left(x\right)\geq 0$，分离参数，构造函数，利用导数求出函数的最值即可.

【详解】$\because$ 函数 $f\left(x\right)=e^x\left(\sin x+a\cos x\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

$\therefore f'\left(x\right)=e^x\left[\left(1-a\right)\sin x+\left(1+a\right)\cos x\right]\geq 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

$\because e^x>0$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

$\therefore(1-a)\sin x+(1+a)\cos x\geq 0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

$\therefore a(\sin x-\cos x)\leq \sin x+\cos x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

$\therefore a\leq \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$，设 $g(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$，

$g'(x)=\dfrac{-2}{(\sin x-\cos)^2}<0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$\therefore g(x)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，

$\therefore a\leq 1$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

故选：A

【点睛】关键点点睛：本题考查了导数与函数的单调性与最值的关系，解题的关键是分离参数、构造函数，考查了基本运算能力.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题分，共 12 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求全部选对的得 4 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

8．已知甲、乙两名篮球运动员进行罚球训练，每人练习 10 组，每组罚球 40 个，每组命中个数的茎叶图如图所示，则下列结论正确的有（　　）

甲		乙
8	0	9
3 2	1	1 3 4 8 9
7 6 5 4 2 0	2	0 1 1 3
7	3	

A. 甲命中个数的极差是 29　　B. 甲命中个数的中位数是 25

C. 甲的命中率比乙高　　D. 乙命中个数的众数是 21

【答案】ACD

【解析】

【分析】

根据茎叶图中的数据，分别计算相应的极差、众数、中位数、平均数并作出判断即可.

【详解】由茎叶图知，甲命中个数的极差为$37-8=29$，故选项A正确；

由茎叶图知，甲命中个数的中位数为$\frac{22+24}{2}=23$，故选项B错误；

由茎叶图中的数据知,甲的命中率为$\overline{x_{甲}}=\frac{8+12+13+20+22+24+25+26+27+37}{10\times 40}=0.535$，

乙的命中率为$\overline{x_{乙}}=\frac{9+11+13+14+18+19+20+21+21+23}{40\times 10}=0.4225$，

所以甲的命中率比乙高，故选项C正确；

由茎叶图知,乙命中个数的众数是21，故选项D正确；

故选：ACD

【点睛】本题考查利用茎叶图求样本的数字特征：极差、众数、中位数、平均数；考查运算求解能力；熟练掌握样本数字特征的计算公式和概念是求解本题的关键;属于中档题.

9. 将函数$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度所得图象对应的函数$g(x)$，下列有关函数$g(x)$的说法正确的是（　　）

A. 图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称

B. 图象关于$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称

C. 当$x=\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in \mathrm{Z})$时取得最大值

D. 在区间$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上单调递增

【答案】BD

【解析】

【分析】

根据函数$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$图象的平移变换公式求出函数$g(x)$的解析式，再利用正弦函数的对称性、单调区间和最值的相关性质求解即可.

【详解】由题意知,函数$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度

得到的函数解析式为$g\left(x\right)=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，

当$x=-\frac{\pi}{6}$时，$2x-\frac{2\pi}{3}=-\pi$,此时$2x-\frac{2\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in z$，故选项A错误；

当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$2x-\frac{2\pi}{3}=0$，此时满足 $2x-\frac{2\pi}{3}=k\pi,k\in z$，故选项 B 正确；

当 $x=\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$ 时，$2x-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in z$，此时函数 $g(x)$ 有最小值，故选项 C 错误；

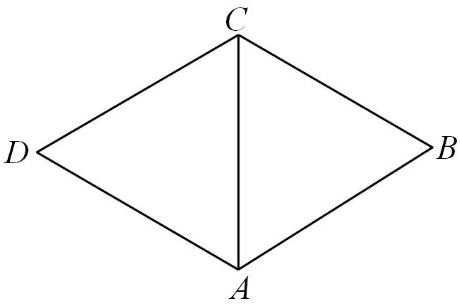
由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in z$，解得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in z$，

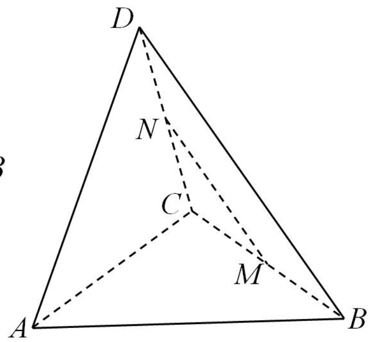
令 $k=0,\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{7\pi}{12}$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增，故选项 D 正确；

故选：BD

【点睛】本题考查 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 图象的平移变换和正弦函数的对称性、单调性和最值的相关性质；考查运算求解能力和整体代换思想；熟练掌握正弦函数的对称性、单调性和最值的相关性质是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

10. M，N 分别为菱形 ABCD 的边 BC，CD 的中点，将菱形沿对角线 AC 折起，使点 D 不在平面 ABC 内，则在翻折过程中，下列结论正确的有（　　）





A. MN∥平面 ABD

B. 异面直线 AC 与 MN 所成的角为定值

C. 在二面角 $D-AC-B$ 逐渐变小的过程中，三棱锥 $D-ABC$ 外接球的半径先变小后变大

D. 若存在某个位置，使得直线 AD 与直线 BC 垂直，则 $\angle ABC$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用线面平行的判定即可判断选项 A；

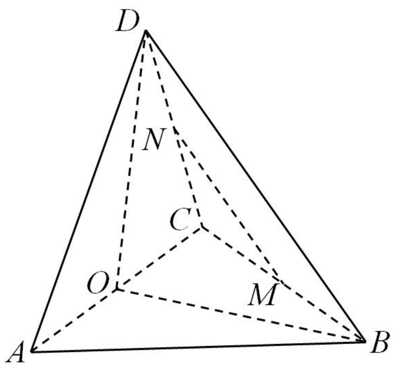
利用线面垂直的判定求出异面直线 AC 与 MN 所成的角即可判断选项 B；

借助极限状态，当平面DAC与平面ABC重合时，三棱锥$D-ABC$外接球即是以ΔABC外接圆圆心为球心，外接圆的半径为球的半径，当二面角$D-AC-B$逐渐变大时，利用空间想象能力进行分析即可判断选项C;

过A作$AH\perp BC$,垂足为H,分$\angle ABC$为锐角、直角、钝角三种情况分别进行分析判断即可判断选项D.

【详解】对于选项A:因为M，N分别为菱形ABCD的边BC，CD的中点，所以MN为ΔBCD的中位线，所以$MN//BD$,因为$MN\not\subset$平面ABD, $BD\subset$平面ABD，所以MN∥平面ABD,故选项A正确；

对于选项B：取AC的中点O，连接DO,BO,作图如下：



则$AC\perp DO, AC\perp BO$, $BO\cap DO=O$,由线面垂直的判定知，$AC\perp$平面BOD,所以$AC\perp BD$,因为$MN//BD$,所以$AC\perp MN$,即异面直线AC与MN所成的角为定值90°，故选项B正确；

对于选项C:借助极限状态，当平面DAC与平面ABC重合时，三棱锥$D-ABC$外接球即是以ΔABC外接圆圆心为球心，外接圆的半径为球的半径，当二面角$D-AC-B$逐渐变大时，球心离开平面ABC，但是球心在底面的投影仍然是ΔABC外接圆圆心，故二面角$D-AC-B$逐渐变小的过程中，三棱锥$D-ABC$外接球的半径不可能先变小后变大，

故选项C错误；

对于选项D:过A作$AH\perp BC$,垂足为H,若$\angle ABC$为锐角，H在线段BC上；若$\angle ABC$为直角，H与B重合；若$\angle ABC$为钝角，H在线段BC的延长线上；

若存在某个位置，使得直线AD与直线BC垂直，因为$AH\perp BC$，所以$CB\perp$平面AHD,由线面垂直的性质知,$CB\perp HD$,

若$\angle ABC$为直角，H与B重合，所以$CB\perp BD$,在ΔCBD中，因为$CB=CD$,

所以$CB\perp BD$不可能成立，即$\angle ABC$为直角不可能成立;

若$\angle ABC$为钝角，H在线段BC的延长线上，则在原平面图菱形$ABCD$中，$\angle DCB$为锐角，由于立体图中$DB < DO + OB$,所以立体图中$\angle DCB$一定比原平面图中更小,，所以$\angle DCB$为锐角，$CB \perp HD$，故点H在线段BC与H在线段BC的延长线上矛盾，因此$\angle ABC$不可能为钝角；综上可知，$\angle ABC$的取值范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.故选项D正确;

故选：ABD

【点睛】本题考查异面垂直、线面平行与线面垂直的判定、多面体的外接球问题；考查空间想象能力和逻辑推理能力；借助极限状态和反证法思想的运用是求解本题的关键；属于综合型强、难度大型试题.

三、填空题：本大题共4小题，每小题3分，共12分.

11. 正六边形$ABCDEF$边长为1，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

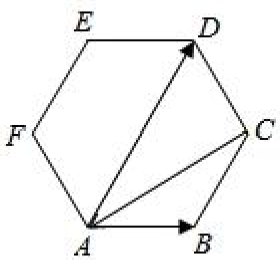
【答案】1

【解析】

【分析】

根据题意作出图形，利用正六边形的性质和平面向量数量积的定义求解即可.

【详解】根据题意作图如下：



由正六边形的性质知，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot 2\overrightarrow{BC}=2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos 60^{\circ}$，

即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times 1\times 1\times\dfrac{1}{2}=1$.

故答案为: 1

【点睛】本题考查平面向量数量积的定义和正六边形的性质;考查数形结合思想和运算求解能力；属于基础题.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x} & x\le 0\\ 1-\log_2 x & x>0\end{cases}$，若 $f(a)=2$，则实数 a 的值是______.

【答案】0 或 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

分 $a>0, a\le 0$ 两种情况分别求出 $f\left(a\right)$ 的表达式，得到关于 a 的方程，解方程即可.

【详解】当 $a>0$ 时，由题意知，$f\left(a\right)=1-\log_2 a=2$，

即 $\log_2 a=-1$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 符合题意；

当 $a\le 0$ 时，由题意知，$f\left(a\right)=2^{1-a}=2$，

解得 $a=0$ 符合题意；

综上可知，实数 a 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$.

故答案为: 0 或 $\frac{1}{2}$

【点睛】本题考查利用分段函数的解析式求参数的值；考查运算求解能力和分类讨论思想；属于中档题.

13. 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，直线 PF 与曲线 C 相交于 M，N 两点，若 $\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{MF}$，则 $\left|MN\right|=$______.

【答案】9

【解析】

【分析】

根据题意作出图形,结合图形知 $\frac{PM}{PF}=\frac{3}{4}$，利用 ΔPAM 与 ΔPOF 相似的相似比和抛物线的定义求出点 M 的横坐标，代入抛物线方程求出其纵坐标,进而求出直线 PM 的方程，然后与抛物线方程联立，利用韦达定理和抛物线定义即可求解.

【详解】根据题意作图如下：

由题意知，准线 $l: x=-2$，焦点 $F\left(2,0\right)$，

因为 $\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{MF}$，结合图形知,$\frac{PM}{PF}=\frac{3}{4}$，

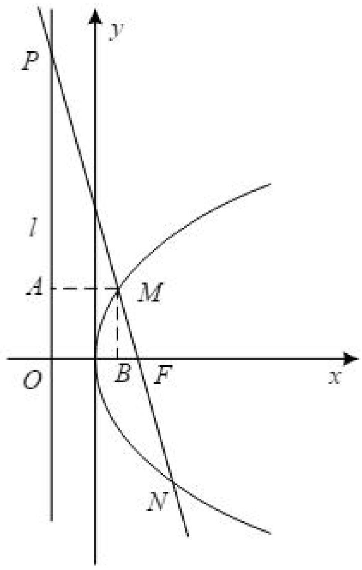
因为 ΔPAM 与 ΔPOF 相似，

所以$\dfrac{AM}{OF}=\dfrac{PM}{PF}=\dfrac{3}{4}$,又$OF=4$,

所以$AM=3$,即$x_M+2=3$，解得$x_M=1$,

因为点M满足抛物线$C:y^2=8x$，

结合图形知，点M的坐标为$\left(1,2\sqrt{2}\right)$,



所以$k_{PM}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{1-2}=-2\sqrt{2}$,则直线$PM$的方程为$y=-2\sqrt{2}\left(x-2\right)$,

与抛物线$C:y^2=8x$联立可得，$x^2-5x+4=0$，

由韦达定理可得,$x_M+x_N=5$,

由抛物线的定义知,$\left|MN\right|=x_M+x_N+2+2=9$.

故答案为: 9

【点睛】本题考查抛物线的定义、直线与抛物线的位置关系及焦点弦问题；考查运算求解能力和数形结合思想；利用抛物线的定义求焦点弦是求解本题的关键；属于中档题、常考题型.

14. 在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，首项$a_1=3$，公差$d=2$，若某学生对其连续10项求和，在遗漏掉一项的情况下，求得余下9项的和为199，则此连续10项的和为______.

【答案】220

【解析】

【分析】

根据题意求出数列$\{a_n\}$的通项公式，设连续10项为$a_{i+1},a_{i+2},a_{i+3},\cdots,a_{i+10}$，$i\in N$，设漏掉的一项为$a_{i+k},1\le k\le 10$，利用等差数列前$n$项和公式得到关于$i,k$的关系式,再由$1\le k\le 10$，$i\in N$求出i的值，进而求出$k$的值和$a_{i+k}$即可.

【详解】由题意知,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$，

设连续10项为$a_{i+1},a_{i+2},a_{i+3},\cdots,a_{i+10}$，$i\in N$，

设漏掉的一项为$a_{i+k},1\le k\le 10$，

则由等差数列前n项和公式得，$\dfrac{(a_{i+1}+a_{i+10})\times 10}{2}-a_{i+k}=199$，

因为$a_{i+1}=2i+3,a_{i+10}=2i+21,a_{i+k}=2i+2k+1$，

所以$9i-k=40$即$9i=40+k$，

因为$1\le k\le 10$,所以$41\le 9i\le 50$，

即$4<\dfrac{41}{9}\le i\le\dfrac{50}{9}<6$，$i\in N$，

所以$i=5,k=5$，$a_{i+k}=a_{10}=2\times 10+1=21$，

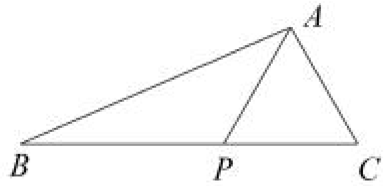
所以此连续10项的和220.

故答案为: 220

【点睛】本题考查等差数列的通项公式和前n项和公式；考查运算求解能力和逻辑推理能力；利用等差数列通项公式和前n项和公式得到关于i,k的关系式是求解本题的关键;属于中档题.

四、解答题：本题共5小题，共48分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 如图，在ΔABC中，点P在BC边上，$B=30°$，$AB=\sqrt{3}BP$.



（1）求$\angle BAP$；

（2）若$CP=2$，$\cos\angle CAP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求$\triangle ACP$的面积.

【答案】（1）$30°$；　（2）$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】

（1）设 $BP=t$，则 $AB=\sqrt{3}t$，在 ΔABP 中，利用余弦定理求出 AP 即可求解；

（2）根据题意求出 $\sin\angle CAP$,利用两角差的正弦公式求出 $\sin C$,在 $\triangle ACP$ 中利用正弦定理求出 AC，代入三角形的面积公式求解即可.

【详解】（1）设 $BP=t$，则 $AB=\sqrt{3}t$，在 ΔABP 中，由余弦定理可得

$AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cdot\cos B=(\sqrt{3}t)^2+t^2-2\sqrt{3}t\cdot t\cos 30°=t^2$，

所以 $AP=t$，即 $AP=BP$，所以 $\angle BAP=\angle B=30°$.

（2）由 $\cos\angle CAP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得，$\sin\angle CAP=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\angle APC=\angle BAP+\angle B=60°$，$\angle C=180°-\angle APC-\angle PAC=120°-\angle PAC$，

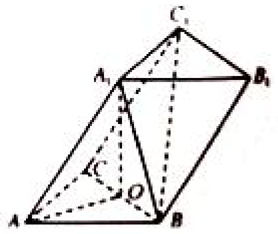
所以 $\sin C=\sin\left(120°-\angle PAC\right)=\sin 120°\cos\angle PAC-\cos 120°\sin\angle PAC=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$，

由正弦定理得，$\frac{CP}{\sin\angle CAP}=\frac{AC}{\sin\angle CPA}$，所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}CP\cdot CA\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{6}}{6}$，即 $S_{\triangle APC}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】本题考查两角差的正弦公式、利用正余弦定理解三角形和三角形的面积公式；考查运算求解能力和知识的综合运用能力;熟练掌握正余弦定理是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

16. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=60^{\circ},\angle A_1AC=\angle A_1AB,AA_1=AB=AC=2$，点 O 是 BC 的中点.



（1）求证：$BC\perp$ 平面 A_1AO；

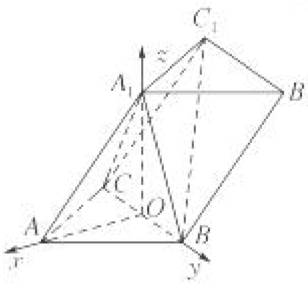
（2）若 $A_1O=1$，求直线 BB_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值.

【答案】(1) 见解析；(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

【解析】

【详解】试题分析：（1）利用 $\Delta A_1AB\cong\Delta A_1AC$ 可得 $A_1B=A_1C$，而 $AB=AC$，O 是 BC 中点，所以 $AO\perp BC, A_1O\perp BC$，由此可证得 $BC\perp$ 平面 A_1AO.（2）以 OA,OB,OA_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，利用直线的方向向量和平面的法向量，计算线面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

试题解析：(1) $\because \angle A_1AC=\angle A_1AB=AB=AC, AA_1=AA_1, \therefore \Delta A_1AB\cong\Delta A_1AC \therefore A_1B=A_1C$. 又 $\because O$ 为 BC 中点，$\therefore AO\perp BC, A_1O\perp BC$. 又 $\because AO\cap A_1O=O, AO, A_1O\subset$ 平面 $A_1AO, \therefore BC\perp$ 平面 A_1AO.



(2) $\because \angle BAC=60^\circ, AB=AC=2, O$ 为 BC 中点，$\therefore BC=2, BO=CO=1, AO=\sqrt{3}$. 又 $\because AA_1=2, A_1O=1, \therefore AO^2+A_1O^2=AA_1^2, \therefore AO\perp A_1O$. 又由（1）知，$BO\perp AO, BO\perp A_1O$，则以 O 为原点，分别以 OA,OB,OA_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$A(\sqrt{3},0,0), B(0,1,0), C(0,-1,0), A_1(0,0,1)$. $\therefore \overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$. 设平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ y-z=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3}), \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,1)$.

设 BB_1 与平面 A_1C_1B 的所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{BB_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BB_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

17. 某品牌手机厂商推出新款的旗舰机型，并在某地区跟踪调查得到这款手机上市时间(x 个月)和市场占有率(y%)的几组相关对应数据：

x	1	2	3	4	5
y	0.02	0.05	0.1	0.15	0.18

(1)根据上表中的数据，用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)根据上述回归方程，分析该款旗舰机型市场占有率的变化趋势，并预测自上市起经过多少个月，该款旗舰机型市场占有率能超过 0.5%(精确到月).

附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$ ， $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

【答案】(1) $\hat{y}=0.042x-0.026$. (2) 预计上市 13 个月时，该款旗舰机型市场占有率能超过 0.5%.

【解析】

【详解】试题分析：（1）根据表中数据，计算 $\overline{x}$，$\overline{y}$ 与 $\hat{a},\hat{b}$ 写出线性回归方程；

（2）根据回归方程得出上市时间与市场占有率的关系，列出不等式求出解集即可预测结果.

试题解析：

(1)由题意知 $\overline{x}=3$，$\overline{y}=0.1$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1.92$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{1.92-5\times3\times0.1}{55-5\times3^2}=0.042$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0.1-0.042\times3=-0.026$，

所以线性回归方程为 $\hat{y}=0.042x-0.026$.

(2)由(1)中的回归方程可知，上市时间与市场占有率正相关，

即上市时间每增加 1 个月，市场占有率约增加 0.042 个百分点.

由 $\hat{y}=0.042x-0.026>0.5$，解得 $x\geq13$，

故预计上市13个月时，该款旗舰机型市场占有率能超过0.5%.

18．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1 F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 $D(4,0)$，F_2 为线段 A_1D 的中点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）点 $P(1,\ t)$ 为椭圆 C 上在第一象限内的点，过点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于 A,B 两点，直线 PA,PB 的倾斜角之和为 π，则直线 AB 斜率是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；　（2）$\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】

（1）利用中点坐标公式和离心率公式得到关于 a,c 的方程,解方程求出 a,c ,再由 a,b,c 的关系式求出 b^2 即可；

（2）由椭圆方程求出点 P 坐标，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直 $PA:y-\frac{3}{2}=k(x-1)$，联立直线方程与椭圆方程得到关于 x 的一元二次方程,利用韦达定理可得 x_1x_P 的表达式,进而求出 x_1 的表达式,同理可得 x_2 的表达式,由此可得 x_1+x_2,x_2-x_1 的表达式,代入直线 AB 的斜率公式运算求解即可.

【详解】（1）设点 $A_1(-a,0)$，$F_2(c,0)$，由题意可知：$c=\frac{-a+4}{2}$，即 $a=4-2c$ ①，

又因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$ ②，

联立方程①②可得：$a=2$，$c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）由（1）椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，代入得点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 $PA:y-\frac{3}{2}=k(x-1)$，

联立椭圆方程，得 $(3+4k^2)x^2+8k\left(\frac{3}{2}-k\right)x+4\left(\frac{3}{2}-k\right)^2-12=0$，

则 $x_1x_p=\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}$，故 $x_1=\dfrac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}$，

同理：$x_2=\dfrac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2-6}{3+4k^2},x_2-x_1=\dfrac{24k}{3+4k^2}$，

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\left[-k\left(x_2-1\right)+\dfrac{3}{2}\right]-\left[k\left(x_1-1\right)+\dfrac{3}{2}\right]}{x_2-x_1}=\dfrac{-k\left(x_2+x_1\right)+2k}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{2}$，

故直线 AB 斜率为定值 $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查椭圆方程及其性质、直线与椭圆的位置关系;考查运算求解能力;联立直线与椭圆方程，正确求出 x_1， x_2 的表达式是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

19. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x-3$，$g(x)=-\dfrac{1+a}{x}(a\in R)$.

（1）设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，求函数 $h(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$\forall a>0$，总存在 $x\geq 1$，使得 $f(x)<g(x)$.

【答案】（1）当 $a>-1$ 时，单调递减区间为 $(0,1+a)$，单调递增区间为 $(1+a,+\infty)$；当 $a\leq -1$ 时，单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；　（2）证明见解析.

【解析】

【分析】

（1）对函数 $h(x)$ 进行求导,分 $a>-1$ 和 $a\leq -1$ 两种情况分别利用导数判断函数的单调性即可;

（2）结合（1）中的结论,判断函数 $h(x)$ 的单调性并求其最小值,构造函数 $h\left(x\right)_{\min}=$ $\varphi(a)=a-1-a\ln(a+1)$,通过对其二次求导求其最大值并判断最大值的符号即可求解.

【详解】（1）由题意知,$h(x)=x-a\ln x+\dfrac{1+a}{x}-3$，定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{1+a}{x^2}=\dfrac{x^2-ax-(1+a)}{x^2}=\dfrac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}$，

①当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，

令 $h'(x)>0$，$\because x>0$，$\therefore x>1+a$，

令$h'(x)<0$，得$0<x<1+a$，

故$h(x)$在$(0,1+a)$上单调递减，在$(1+a,+\infty)$上单调递增，

②当$a+1\leq 0$，即$a\leq -1$时，$h'(x)>0$在$(0,+\infty)$恒成立，

所以函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

综上可知，当$a>-1$时，$h(x)$的单调递减区间为$(0,1+a)$，单调递增区间为$(1+a,+\infty)$；

当$a\leq -1$时，$h(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间.

（2）证明：考虑$h(x)=f(x)-g(x)$，当$a>0$时，

由（1）知，$h(x)$的单调递减区间为$(0,1+a)$，单调递增区间为$(1+a,+\infty)$，

所以$h_{\min}=h(a+1)=a-1-a\ln(a+1)$

记$\varphi(a)=a-1-a\ln(a+1)$，则$\varphi'(a)=1-\ln(a+1)-\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{1}{a+1}-\ln(a+1)$，

$\varphi''(a)=-\dfrac{1}{(a+1)^2}-\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{a+2}{(a+1)^2}<0$，所以$\varphi'(a)$在$(0,+\infty)$单调递减，

注意到$\varphi'(0)=1>0$，$\varphi'(1)=\dfrac{1}{2}-\ln 2=\dfrac{1}{2}(1-\ln 4)<0$，

所以$\varphi'(a)$有唯一的零点，记为a_0，

则$\dfrac{1}{a_0+1}-\ln\left(a_0+1\right)=0$，且$a_0\in(0,1)$，

所以当$a\in\left(0,a_0\right)$时，$\varphi'(a)>0$，$\varphi(a)$单调递增，

当$a\in\left(a_0,+\infty\right)$时，$\varphi'(a)<0$，$\varphi(a)$单调递减，

所以$\varphi(a)\leq\varphi\left(a_0\right)=a_0-1-a_0\ln\left(a_0+1\right)=a_0-1-\dfrac{a_0}{a_0+1}=\dfrac{a_0^2-a_0-1}{a_0+1}$

由于$a_0\in(0,1)$，所以$a_0^2-a_0<0$，所以$a_0^2-a_0-1<0$，所以$\dfrac{a_0^2-a_0-1}{a_0+1}<0$，

即$\varphi(a)<0$，所以$h(x)_{\min}<0$，

故$\forall a>0$，总存在$x\geq 1$，使得$h(x)<0$，即$f(x)<g(x)$.

【点睛】本题考查利用导数判断函数的单调性、通过构造函数并求其最值求解函数存在性问题;考查分类讨论思想、逻辑思维能力和运算求解能力;通过构造函数$\varphi(a)$并对其二次求导求其最大值是求解本题的关键;属于综合型、难度大型试题.