正态分布参考答案

题型一.正态曲线

1.【解析】∵P（$\xi<2a-3$）$=P$（$\xi>a+2$），

∴$2a-3+a+2=6$，

∴$a=\frac{7}{3}$.

故选：B.

2.【解析】从正态曲线的对称轴的位置看，显然$\mu_1<\mu_2$，

正态曲线越“瘦高”，表示取值越集中，σ越小，

∴$\sigma_1<\sigma_2$

故选：A.

3.【解析】∵由图可知，$\mu_1<0<u_2$，$\sigma_1<\sigma_2$，

∴P（$Y\geq\mu_2$）$<P$（$Y\geq\mu_1$），故 A 选项错误，

由图可得，P（$X\leq\sigma_2$）$>P$（$X\leq\sigma_1$），故 B 选项错误，

由图可得，对任意实数 t，P（$X\leq t$）$\geq P$（$Y\leq t$），而 P（$X\leq t$）$=1-P$（$X\geq t$），P（$Y\leq t$）$=1-P$（$Y\geq t$），故 P（$X\geq t$）$<P$（$Y\geq t$），故 C 选项正确，D 选项错误.

故选：ABD.

4.【解析】∵数学成绩ξ近似地服从正态分布 N（$453，99^2$），

∴P（$552<Z\leq651$）$=\frac{1}{2}\times$（$0.9545-0.6827$）$=0.1359$，

∴考生成绩落在（552，651]的人数约为 $530000\times0.1359=72027$.

故选：B.

5.【解析】∵成绩$\xi\sim N$（$90，a^2$），

∴其正态曲线关于直线 $x=90$ 对称，

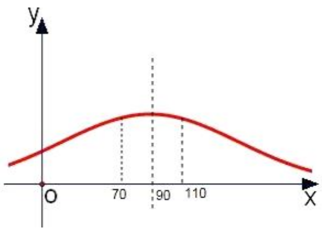
又∵成绩在 70 分到 110 分之间的人数约为总人数的$\frac{3}{5}$，

由对称性知：

成绩在 110 分以上的人数约为总人数的 $\frac{1}{2}（1-\frac{3}{5}）=\frac{1}{5}$，

∴此次数学考试成绩不低于 110 分的学生约有：$\frac{1}{5}\times 600=120$．

故答案为：120．



6.【解析】由题意可知 $\mu=110$，$\sigma=10$，事件 AB 为 $90<\xi\le 100$，

$\because 90=\mu-2\sigma$，$100=\mu-\sigma$，

$$P(AB)=P(90<\xi\le 100)=P(\mu-2\sigma<\xi\le\mu-\sigma)$$

$$=\frac{P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)}{2}=\frac{0.95-0.68}{2}=\frac{27}{200}，$$

$$P(A)=P(90<\xi\le 110)=P(\mu-2\sigma<\xi\le\mu)=\frac{P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)}{2}=\frac{95}{200}，$$

由条件概率的公式得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{27}{200}\cdot\frac{200}{95}=\frac{27}{95}$，故答案为 $\frac{27}{95}$．

7.【解析】随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(10,\sigma^2)$，$\therefore P(X\ge 10)=\frac{1}{2}$，

由 $P(8\le X\le 10)=n$，得 $P(10\le X\le 12)=n$，

又 $P(X>12)=m$，

$\therefore m+n=\frac{1}{2}$，且 $m>0$，$n>0$，

则 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)(2m+2n)=6+\frac{4n}{m}+\frac{2m}{n}\ge 6+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=6+4\sqrt{2}$．

当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $m=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，$n=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 时等号成立．

$\therefore \dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值为$6+4\sqrt{2}$.

题型二.正态分布

1.【解析】（Ⅰ）设正常情况下，该生产线上包装出来的白糖质量为Xg，由题意可知$X\sim N(500,5^2)$.

由于485＝500－3×5，

所以根据正态分布的对称性与"3σ原则"可知：

$P(X<485)=\frac{1}{2}[1-P(500-3\times5\le X\le 500+3\times5)]\approx\frac{1}{2}\times0.0026=0.0013$；

（Ⅱ）检测员的判断是合理的.

因为如果生产线不出现异常的话，由（Ⅰ）可知，随机抽取两包检查，质量都小于485g的概率约为：

$0.0013\times0.0013=1.69\times10^{-6}$，几乎为零，但这样的事件竟然发生了，所以有理由认为生产线出现异常，检测员的判断是合理的.

2.【解析】（1）

$\overline{x}=\frac{1}{100}(4\times24+9\times26+16\times28+24\times30+18\times32+14\times34+10\times36+5\times38)=31$，

$s^2=\frac{1}{100}(4\times7^2+9\times5^2+16\times3^2+24\times1+18\times1+14\times3^2+10\times5^2+5\times7^2)=12.28$；

（2）棉花的纤维长度服从分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu=31$，$\sigma=\sqrt{12.28}\approx3.504$.

①利用正态分布，则$P(X>\mu-2\sigma)=1-\frac{1}{2}(1-0.954)=0.97715$，

②$\mu-2\sigma=31-2\times3.504\approx23.992$，

故$f(Y>\mu-2\sigma)=f(Y>23.992)=1$，满足条件，

∴认为该批优质棉花合格．

题型三.正态分布与其他分布列的综合应用

1.【解析】（Ⅰ）抽取产品的质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 分别为：

$\overline{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$，

$s^2=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150$．

（Ⅱ）（*i*）由（Ⅰ）知 $Z\sim N(200，150)$，从而 $P(187.8<Z<212.2)=P(200-12.2<Z<200+12.2)=0.6826$；

（*ii*）由（*i*）知一件产品的质量指标值位于区间（187.8，212.2）的概率为 0.6826，

依题意知 $X\sim B(100，0.6826)$，所以 $EX=100\times0.6826=68.26$．

2.【解析】（1）由题可知尺寸落在（μ－3σ，μ+3σ）之内的概率为 0.9974，

则落在（μ－3σ，μ+3σ）之外的概率为 1－0.9974＝0.0026，

由题意知 $X\sim B(16，0.0026)$，

因为 $P(X=0)=C_{16}^{0}\times(1-0.9974)^{0}\times0.9974^{16}\approx0.9592$，

所以 $P(X\geq1)=1-P(X=0)=0.0408$，

因为 $X\sim B(16，0.0026)$，

所以 $E(X)=16\times0.0026=0.0416$；

（2）（ⅰ）如果生产状态正常，一个零件尺寸在 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的概率只有 0.0026，一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的零件的概率只有 0.0408，发生的概率很小．因此一旦发生这种状况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的．

（ⅱ）由 $\overline{x}=9.97$，$s\approx0.212$，得μ的估计值为 $\hat{\mu}=9.97$，σ的估计值为 $\hat{\sigma}=0.212$，由样本数据可以看出一个

零件的尺寸在 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外，因此需对当天的生产过程进行检查．

剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据 9.22，剩下的数据的平均数为

$\frac{1}{15}$（16×9.97－9.22）＝10.02，

因此μ的估计值为 10.02．

$\sum_{i=1}^{16} x_{i}^{2}$＝16×0.212^2+16×9.97^2≈1591.134，

剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}，\hat{\mu}+3\hat{\sigma})$之外的数据 9.22，剩下的数据的样本方差为

$\frac{1}{15}$（1591.134－9.22^2－15×10.02^2）≈0.008，

因此σ的估计值为 $\sqrt{0.008}\approx$0.09．

3.

【解析】（1）由频率分布直方图的性质可得，（0.01+0.02+0.09+a+0.08）×4＝1，解得 a＝0.05．

（2）μ＝（10×0.02+14×0.03+18×0.03+22×0.08+26×0.05+30×0.03+34×0.01）×4＝21.84，

$$P(12.36\le X\le 25)=P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+\sigma)=\frac{0.9973+0.6827}{2}=0.8400,$$

所以估计 1 万个用户中，月使用次数 X 位于区间[12.36，25]内的人数为 8400．

（3）依题意知 $Y\sim B$（10，0.2），$P(Y=k)=C_{10}^{k}\times 0.2^{k}\times 0.8^{10-k}$，

其中 k＝0，1，2，…，10，且 $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{11-k}{4k}$，$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)}=\frac{4k+4}{10-k}$，

当 P（Y＝k）＞P（Y＝k－1）时，11－k＞4k，则 k＜2.2，

当 P（Y＝k）＞P（Y＝k+1）时，4k+4＞10－k，则 k＞1.2，

所以当 k＝2 时，P（Y＝k）最大