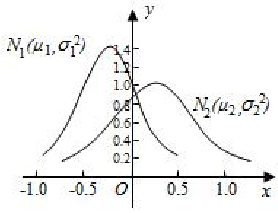
正态分布

题型一.正态曲线

1．设随机变量ξ服从正态分布 N（3，4），若 P（$\xi<2a-3$）＝P（$\xi>a+2$），则 a 的值等于（　　）

A．$\frac{5}{3}$　　B．$\frac{7}{3}$　　C．3　　D．5

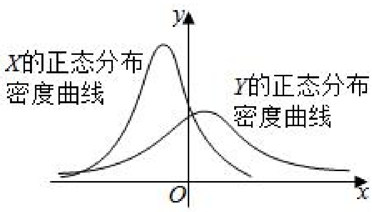
2．设两个正态分布 N_1（μ_1，σ_1^2）和 N_2（μ_2，σ_2^2）的密度函数曲线如图所示，则有（　　）



A．$\mu_1<\mu_2$，$\sigma_1<\sigma_2$　　B．$\mu_1<\mu_2$，$\sigma_1>\sigma_2$

C．$\mu_1>\mu_2$，$\sigma_1<\sigma_2$　　D．$\mu_1>\mu_2$，$\sigma_1>\sigma_2$

3．（多选题）设 $X\sim N$（μ_1，σ^2_1），$Y\sim N$（μ_2，σ_2^2），这两个正态分布密度曲线如图所示，下列结论中错误的是（　　）



A．P（$Y\geq\mu_2$）$\geq P$（$Y\geq\mu_1$）

B．P（$X\leq\sigma_2$）$\leq P$（$X\leq\sigma_1$）

C．对任意正数 t，P（$X\leq t$）$\geq P$（$Y\leq t$）

D．对任意正数 t，P（$X\geq t$）$\geq P$（$Y\geq t$）

4．已知参加 2020 年某省夏季高考的 53 万名考生的成绩 Z 近似地服从正态分布 $N(453,99^2)$，估计这些考生成绩落在（552，651]的人数约为（　　）

（附：$Z\sim N$（μ，σ^2），则 P（$\mu-\sigma<Z\leq\mu+\sigma$）＝0.6827，$P$（$\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma$）＝0.9545）

A．36014　　B．72027　　C．108041　　D．168222

5．某校在一次月考中约有 600 人参加考试，数学考试的成绩$\xi \sim N$（90，a^2）（a＞0，试卷满分 150 分），统计结果显示数学考试成绩在 70 分到 110 分之间的人数约为总人数的$\frac{3}{5}$，则此次月考中数学考试成绩不低于 110 分的学生约有____人．

6.某校高二学生一次数学诊断考试成绩（单位：分）X 服从正态分布 $N\left(110,10^2\right)$，从中抽取一个同学的数学成绩ξ，记该同学的成绩$90<\xi\le 110$为事件 A，记该同学的成绩$80<\xi\le 100$为事件 B，则在 A 事件发生的条件下 B 事件发生的概率 $P\left(B|A\right)=$_________．（结果用分数表示）

附参考数据：$P\left(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma\right)=0.68$；$P\left(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma\right)=0.95$；$P\left(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma\right)=0.99$．

7.随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N\left(10,\sigma^2\right)$，$P\left(X>12\right)=m$，$P(8\le X\le 10)=n$，则 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为_________．

题型二.正态分布

1．某厂包装白糖的生产线，正常情况下生产出来的白糖质量服从正态分布 N（500，5^2）（单位：g）．

（Ⅰ）求正常情况下，任意抽取一包白糖，质量小于 485g 的概率约为多少？

（Ⅱ）该生产线上的检测员某天随机抽取了两包白糖，称得其质量均小于 485g，检测员根据抽检结果，判断出该生产线出现异常，要求立即停产检修，检测员的判断是否合理？请说明理由．

附：$X\sim N$（μ，σ^2），则 P（$\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma$）＝0.6826，$P$（$\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma$）＝0.9544，$P$（$\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma$）＝0.9974．

2．某纺织厂为了生产一种高端布料，准备从 A 农场购进一批优质棉花，厂方技术员从 A 农场存储的优质棉花中随机抽取了 100 处棉花，分别测量了其纤维长度（单位：mm）的均值，收集到 100 个样本数据，并制成如下频数分布表：

长度（单	[23，25）	[25，27）	[27，29）	[29，31）	[31，33）	[33，35）	[35，37）	[37，39]

位：mm）								
频数	4	9	16	24	18	14	10	5

（1）求这 100 个样本数据的平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2（同一组数据用该区间的中点值作代表）；

（2）将收集到的数据绘成直方图可以认为这批棉花的纤维长度服从分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

其中 $\mu\approx\overline{x}$，$\sigma^2=s^2$

①利用正态分布，求 $P(X>\mu-2\sigma)$；

②纺织厂将 A 农场送来的这批优质棉进行二次检验，从中随机抽取 20 处测量其纤维均值 y_i（$i=1$，2…，20），数据如下：

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
24.1	31.8	32.7	28.2	28.4	34.3	29.1	34.8	37.2	30.8
y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}
30.6	25.2	32.9	27.1	35.9	28.9	33.9	29.5	35.0	29.9

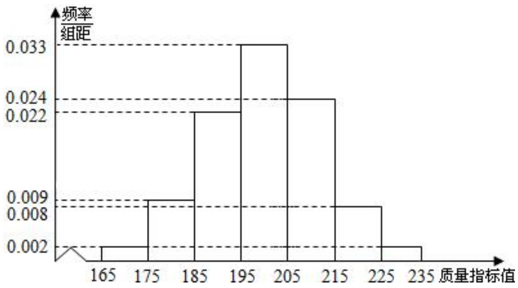
若 20 个样本中纤维均值 $Y>\mu-2\sigma$ 的频率不低于①中 $P(X>\mu-2\sigma)$ 即可判断该批优质棉花合格，否则认为农场运送时掺杂了次品，判断该批棉花不合格．按照此依据判断 A 农场送来的这批棉花是否为合格的优质棉花，并说明理由．

附：若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9543$，

$\sqrt{12.28}\approx3.504$

题型三.正态分布与其他分布列的综合应用

1．从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 N（μ，σ^2），其中μ近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

（i）利用该正态分布，求 P（$187.8<Z<212.2$）；

（ii）某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求 EX.

附：$\sqrt{150}\approx 12.2$.

若 $Z\sim N$（μ，σ^2）则 P（$\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma$）$=0.6826$，P（$\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma$）$=0.9544$.

2．为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 N（μ，σ^2）．

（1）假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）之外的零件数，求 P（$X\geq 1$）及 X 的数学期望；

（2）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．

（ⅰ）试说明上述监控生产过程方法的合理性；

（ⅱ）下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

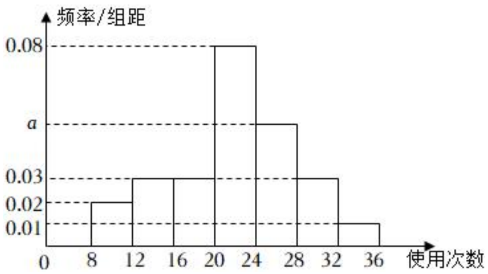
经计算得 $\overline{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2)}\approx 0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件

的尺寸，i＝1，2，…，16．

用样本平均数 $\overline{x}$ 作为μ的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为σ的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除（μ﹣3σ，μ+3σ）之外的数据，用剩下的数据估计μ和σ（精确到 0.01）．

附：若随机变量 Z 服从正态分布 N（μ，σ^2），则 P（μ﹣3σ＜Z＜μ+3σ）＝0.9974，$0.9974^{16}\approx0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx0.09$．

3.某共享单车集团为了进行项目优化，对某市月卡用户随机抽取了 200 人，统计了他们在同一月的使用次数（假设每月使用次数均在 8 至 36 之间）．将样本数据分成[8，12)，[12，16)，[16，20)，[20，24)，[24，28)，[28，32)，[32，36]七组，绘制成如图所示的频率分布直方图，并用样本的频率分布估计总体的频率分布．



（1）求图中的 a 的值；

（2）设该市月卡用户每月使用次数近似服从正态分布 N（μ，σ^2），其中μ近似为样本的平均数（各区间数据用中点值近似计算），取σ＝3.16，若该城市恰有 1 万个用户，试估计这些用户中，月使用次数 X 位于区间[12.36，25]内的人数；

（3）现从该市月卡用户中随机抽取 10 人，其中月使用次数在[24，28)的有 Y 人，记“事件 Y＝k”的概率为 P（Y＝k），其中 k＝0，1，2，…，10，当 P（Y＝k）最大时，求 k 的值．

参考数据：若随机变量ξ服从正态分布 N（μ，σ^2），则 P（μ﹣σ≤ξ≤μ+σ）≈0.6827，P（μ﹣2σ≤ξ≤μ+2σ）≈0.9545，P（μ﹣3σ≤ξ≤μ+3σ）≈0.9973．