二项式定理运用专题参考答案

1. 根据二项式的展开式得到可以第一个括号里出$3x^3$项，第二个括号里出$\frac{1}{x}$项，或者第一个括号里出x^4，第二个括号里出$\frac{1}{x^2}$，具体为：

$(3x^3)\left[C_8^1 2^7\left(-\frac{1}{x}\right)\right]+x^4\cdot\left[C_8^2 2^6\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right]$ 化简得到-1280 x^2

2 【答案】$1-\cos 2$.

【解析】

试题分析：由二项式通项可得，$T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\cdot(\frac{a}{x})^r=a^rC_6^rx^{3-\frac{3}{2}r}$，令$r=2$得，

$T_3=a^2C_6^2=60$，所以$a=2$。因此$\int_0^a \sin xdx=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2$。

3. 因为$x^3=x\cdot x^2$，含x^3项的系数为$C_6^3+C_6^1\cdot(-1)\cdot C_5^1=-10$. 故选：B

4. 法一：利用二项展开式的通项公式求解. $(x^2+x+y)^5=(x^2+x)+y]^5$，

含 y^2的项为 $T_3=C_5^2(x^2+x)^3\cdot y^2$. 其中$(x^2+x)^3$中含 x^5的项为 $C_3^1x^4\cdot x=C_3^1x^5$. 所以 x^5y^2的系数为 $C_5^2C_3^1=30$.

法二：利用组合知识求解.

$(x^2+x+y)^5$为 5 个 x^2+x+y 之积，其中有两个取 y，两个取 x^2，一个取 x 即可，所以 x^5y^2的系数为 $C_5^2C_3^2C_1^1=30$.

5. 【解析】二项式$(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})^n$的各项系数的和为$(1+3)^n=4^n$,

二项式$(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})^n$的各项二项式系数的和为$(1+1)^n=2^n$,

因为各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为64,

所以$\frac{4^n}{2^n}=2^n=64$，$n=6$，故选 C。

6. 【答案】D

【解析】因为$(1+x)^n$的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，所以$C_n^3=C_n^7$，

解得$n=10$，

所以二项式$(1+x)^{10}$中奇数项的二项式系数和为$\frac{1}{2}\times 2^{10}=2^9$.

7. 【答案】3

【解析】由已知得$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$，故$(a+x)(1+x)^4$的展开式中x的奇数次幂项分别为

$4ax$，$4ax^3$，x，$6x^3$，x^5，其系数之和为$4a+4a+1+6+1=32$，解得$a=3$．学科网

8. 【答案】A

【解析】

试题分析：由已知得，$|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|$的值等于二项式$(2+3x)^5$的展开式各项系数和，令$x=1$，得$|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=5^5$.

9. **解析**：依题意，得$C_n^0+\frac{1}{4}\times C_n^2=2\times\frac{1}{2}\times C_n^1$，

即$n^2-9n+8=0$，解得$n=8$，$n=1$(舍去)，

所以$n=8$.

设第$r+1$项的系数最大，

则$$\begin{cases}\frac{1}{2^r}C_8^r\geq\frac{1}{2^{r+1}}C_8^{r+1},\\ \frac{1}{2^r}C_8^r\geq\frac{1}{2^{r-1}}C_8^{r-1},\end{cases}$$

即$$\begin{cases}\frac{1}{8-r}\geq\frac{1}{2(r+1)},\\ \frac{1}{2r}\geq\frac{1}{9-r},\end{cases}$$ 解得$r=2$或$r=3$.

所以系数最大的项为$T_3=7x^5$，$T_4=7x^{\frac{7}{2}}$.

答案：$7x^5$，$7x^{\frac{7}{2}}$

10.【解析】 当$x=-2$时，$x+3=1$．等式化为：$(-2)^4\cdot 2^8=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{12}$.

$\therefore a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{12}=2^{12}$ …①

当$x=-4$时，$x+3=-1$．等式化为：$(-4)^4\cdot 0^8=0=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_{12}$…②

上述①②两等式相相减有：$a_1+a_3+\dots+a_{11}=\frac{1}{2}(2^{12}+0)=2^{11}$，

$\log_2(a_1+a_3+\dots+a_{11})=\log_2 2^{11}=11$．故答案为：D.

11【分析】

根据 $x^5=\frac{1}{32}[(2x-1)+1]^5$，再根据二项式的通项公式进行求解即可.

【详解】因为 $x^5=\frac{1}{32}[(2x-1)+1]^5$，所以二项式 $[(2x-1)+1]^5$ 的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x-1)^{5-r}\cdot 1^r=C_5^r\cdot(2x-1)^{5-r}$，令 $r=3$，所以 $T_3=C_5^2\cdot(2x-1)^2$，因此有

$a_2=\frac{1}{32}\cdot C_5^3=\frac{1}{32}\cdot C_5^2=\frac{1}{32}\times\frac{5\times4}{2}=\frac{5}{16}$.

故选：C

12. **解析**：原等式两边求导得 $10(2x-3)^4=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4$，令上式中 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=10$

13. **解析**：原式 $=4\cdot6^n+5n-a=4(5+1)^n+5n-a=4(C_n^0 5^n+C_n^1 5^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}5^2+C_n^{n-1}5+C_n^n)+5n-a=4(C_n^0 5^n+C_n^1 5^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}5^2)+25n+4-a$，因为原式能被 25 整除，则正整数 a 的最小值为 4.

14【解析】$S=C_{27}^1+C_{27}^2+\dots+C_{27}^{27}=2^{27}-1=8^9-1=(9-1)^9-1=C_9^0\times9^9-C_9^1\times9^8+\dots+C_9^8\times9-C_9^9-1$

$=9(C_9^0\times9^8-C_9^1\times9^7+\dots+C_9^8)-2$.

∵$C_9^0\times9^8-C_9^1\times9^7+\dots+C_9^8$ 是正整数，∴S 被 9 除的余数为 7.

15【解析】$2^{37}=2\cdot(17-1)^9$

$=2\left[C_9^0 17^9+C_9^1 17^8(-1)^1+C_9^2 17^7(-1)^2+\cdots+C_9^8 17^1(-1)^8+C_9^9 17^0(-1)^9\right]$

在上述展开式中 $2C_9^9 17^0(-1)^9=-2$ 不能被 17 整除，即余数为 15，故选:C

16【解析】$1.02^3=(1+0.02)^3=1+C_3^1\times0.02+C_3^2\times0.02^2+0.02^3\approx1.061$