概率与统计拓展综合专项靶题

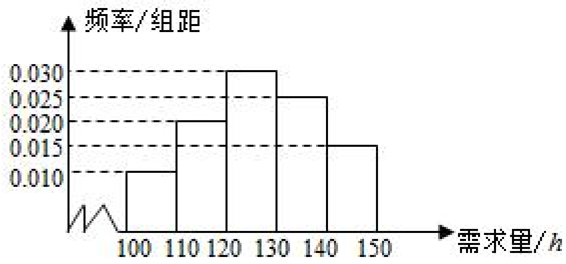
类型一　与函数的综合

1．为普及科学知识，提高全民科学参与度，某科技馆举办了游戏科普有奖活动，设置了甲、乙两种游戏方案，具体规则如下：玩一次甲游戏，若绿灯闪亮，获得 70 分；若黄灯闪亮，则获得 10 分；若红灯闪亮，则扣除 20 分（即获得-20 分），绿灯，黄灯及红灯闪亮的概率分别为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$；玩一次乙游戏，若出现音乐，则获得 80 分；若没有出现音乐，则扣除 20 分（即获得-20 分），出现音乐的概率为$p\left(0<p<1\right)$.每位顾客能参与两次甲游戏或两次乙游戏（两次游戏中甲、乙不能同时参与，只能选择其一）且每次游戏互不影响.若两次游戏后获得的分数为正，则获得奖品；若获得的分数为负，则没有奖品.

⑴若$p=\frac{1}{4}$，试问顾客选择哪种游戏更容易获得奖品？请说明理由.

⑵当p在什么范围内取值时，顾客参与两次乙游戏后取得的平均分更高？

2．经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出$1t$该产品获利润 500 元，未售出的产品，每$1t$亏损 300 元，根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示，经销商为下一个销售季度购进了$120t$的该农产品，以X（单位t：$100\le X\le 150$）表示下一个销售季度内的市场需求量，T（单位：元）表示下一个销售季度内经销该产品的利润.



（1）根据直方图估计下一个销售季度市场需求量X的平均数、中位数和众数；

（2）在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率（例如：若$x\in\left(100,110\right)$，则取$X=105$，且$X=105$的概率等于需求量落入$\left[100,110\right)$的频率，）求利润T的分布列和数学期望.

类型二　与导数综合

1. 今年 3 月 5 日，国务院总理李克强作的政府工作报告中，提到要“惩戒学术不端，力戒学术不端，力戒浮躁之风”. 教育部日前公布的《教育部 2019 年部门预算》中透露，2019 年教育部拟抽检博士学位论文约 6000 篇，预算为 800 万元. 国务院学位委员会、教育部 2014 年印发的《博士硕士学位论文抽检办法》通知中规定：每篇抽检的学位论文送 3 位同行专家进行评议，3 位专家中有 2 位以上（含 2 位）专家评议意见为“不合格”的学位论文，将认定为“存在问题学位论文”. 有且只有 1 位专家评议意见为“不合格”的学位论文，将再送 2 位同行专家进得复评，2 位复评专家中有 1 位以上（含 1 位）专家评议意见为“不合格”的学位论文，将认定为“存在问题学位论文”. 设每篇学位论文被每位专家评议为“不合格”的概率均为 $p(0<p<1)$，且各篇学位论文是否被评议为“不合格”相互独立.

（1）记一篇抽检的学位论文被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$；

（2）若拟定每篇抽检论文不需要复评的评审费用为 900 元，需要复评的评审费用为 1500 元；除评审费外，其它费用总计为 100 万元. 现以此方案实施，且抽检论文为 6000 篇，问是否会超过预算？并说明理由.

2．某家畜研究机构发现每头成年牛感染 H 型疾病的概率是 $p(0<p<1)$，且每头成年牛是否感染 H 型疾病相互独立.

（1）记 10 头成年牛中恰有 3 头感染 H 型疾病的概率是 $f(p)$，求当概率 p 取何值时，$f(p)$ 有最大值？

（2）若以（1）中确定的 p 值作为感染 H 型疾病的概率，设 10 头成年牛中恰有 k 头感染 H 型疾病的概率是 $g(k)$，求当 k 为何值时，$g(k)$ 有最大值？

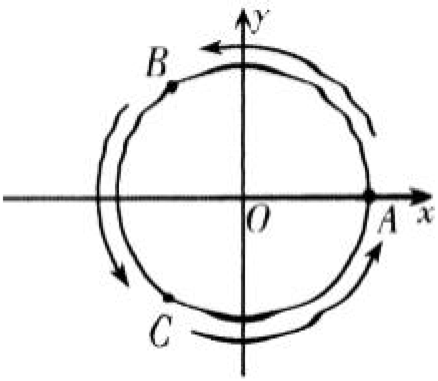
类型三　与数列综合

1．已知 A_1，A_2，A_3，…，A_{10} 等 10 所高校举行自主招生考试，某同学参加每所高校的考试获得通过的概率均为 $p(0<p<1)$.

（1）如果该同学 10 所高校的考试都参加，恰有 $m(1\le m\le 10)$ 所通过的概率为 $f(p)$，当 p 为何值时，$f(p)$ 取得最大值；

（2）若$p=\frac{1}{2}$，该同学参加每所高校考试所需的费用均为a元，该同学决定按A_1，A_2，A_3，…，A_{10}顺序参加考试，一旦通过某所高校的考试，就不再参加其它高校的考试，否则，继续参加其它高校的考试，求该同学参加考试所需费用ξ的分布列及数学期望.

2. 如图，直角坐标系中，圆的方程为$x^2+y^2=1$，$A(1,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆上三个定点，某同学从$A$点开始，用掷骰子的方法移动棋子. 规定：①每掷一次骰子，把一枚棋子从一个定点沿圆弧移动到相邻下一个定点；②棋子移动的方向由掷骰子决定，若掷出骰子的点数为偶数，则按图中箭头方向移动；若掷出骰子的点数为奇数，则按图中箭头相反的方向移动. 设掷骰子n次时，棋子移动到A，B，C处的概率分别为$P_n(A)$，$P_n(B)$，$P_n(C)$. 例如：掷骰子一次时，棋子移动到A，B，C处的概率分别为$P_1(A)=O$，$P_1(B)=\frac{1}{2}$，$P_1(C)=\frac{1}{2}$.



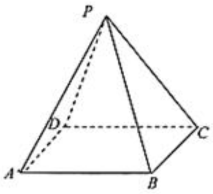
（1）分别掷骰子二次，三次时，求棋子分别移动到A，B，C处的概率；

（2）掷骰子N次时，若以X轴非负半轴为始边，以射线OA，OB，OC为终边的角的余弦值记为随机变量X_n，求X_4的分布列和数学期望；

（3）记$P_n(A)=a_n$，$P_n(B)=b_n$，$P_n(C)=c_n$，其中$a_n+b_n+c_n=1$. 证明：数列$\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$是等比数列，并求$a_{2020}$.

类型四　与空间几何综合

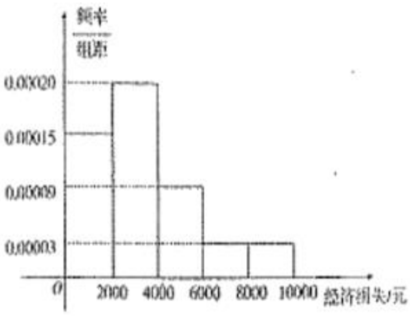
1. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高都为 2. 现从该棱锥的 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，设随机变量 X 表示所得三角形的面积.



（1）求概率 $P(X=2)$ 的值；（2）求随机变量 X 的概率分布及其数学期望 $E(X)$.

类型五　与几何概型几何

1．2014 年 7 月 18 日 15 时，超强台风“威马逊”登陆海南省. 据统计，本次台风造成全省直接经济损失 119.52 亿元，适逢暑假，小明调查住在自己小区的 50 户居民由于台风造成的经济损失，作出如下频率分布直方图：



	经济损失 4000 元以下	经济损失 4000 元以上	合计
捐款超过 500 元	30		
捐款低于 500 元		6	
合计			

（1）台风后区委会号召小区居民为台风重灾区捐款，小明调查的 50 户居民捐款情况如上表，在表格空白处填写正确数字，并说明是否有 95% 以上的把握认为捐款数额是否多于或少于 500 元和自身经济损失是否到 4000 元有关？

（2）台风造成了小区多户居民门窗损坏，若小区所有居民的门窗均由李师傅和张师傅两人进行维修，李师傅每天早上在 7:00 到 8:00 之间的任意时刻来到小区，张师傅每天早上在

7:30 到 8:30 分之间的任意时刻来到小区，求连续 3 天内，李师傅比张师傅早到小区的天数的分布列和数学期望.

附：临界值表

k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
$P(K^2 \geq k$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.