题型五：全概率公式及其应用参考答案

1.【解析】设事件 A 表示甲正点到达目的地，事件 B 表示甲乘动车到达目的地，事件 C 表示甲乘汽车到达目的地，

由题意知 $P(B)=0.6,P(C)=0.4,P(A|B)=0.9,P(A|C)=0.7$.

由全概率公式得 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=0.6\times0.9+0.4\times0.7$

$=0.28+0.54=0.82$ 。

故选：C

2.【解析】设用该试剂检测呈现阳性为事件 B，被检测者患病为事件 A，未患病为事件 $\overline{A}$，

则 $P(B|A)=0.99$， $P(A)=0.02$， $P(B|\overline{A})=0.05$， $P(\overline{A})=0.98$，

故所求概率 $P(B)=0.99\times0.02+0.05\times0.98=0.0688$.

故选：A.

3.【解析】记第一次闭合后出现红灯为事件 A，则第一次出现绿灯为事件 $\overline{A}$，第二次闭合后出现红灯为事件 B，出现绿灯为 $\overline{B}$，

$P(A)=P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$， $P(B|A)=\dfrac{1}{3}$， $P(B|\overline{A})=\dfrac{3}{5}$，

所以 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$.

故答案为： $\dfrac{7}{15}$.

4.【解析】设“考生答对题目”为事件 A，“考生知道正确答案”为事件 B，

则 $P\left(B\right)=0.5$， $P\left(A\middle|B\right)=1$， $P\left(A\middle|\overline{B}\right)=0.25$，

$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=1\times0.5+0.25\times0.5=0.625$.

故答案为：0.625.

5.【解析】设 A 表示第二次取出 3 个球均为新球，B_i 为第一次取出 3 球中有 i 个新球，i＝0，1，2，3，

则 $P\left(B_0\right)=\dfrac{C_3^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{220}$， $P\left(B_1\right)=\dfrac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\dfrac{27}{220}$， $P\left(B_2\right)=\dfrac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\dfrac{108}{220}$， $P\left(B_3\right)=\dfrac{C_9^3}{C_{12}^3}=\dfrac{84}{220}$，

$P\left(A|B_0\right)=\dfrac{C_9^3}{C_{12}^3}=\dfrac{84}{220}$， $P\left(A|B_1\right)=\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}=\dfrac{56}{220}$， $P\left(A|B_2\right)=\dfrac{C_7^3}{C_{12}^3}=\dfrac{35}{220}$， $P\left(A|B_3\right)=\dfrac{C_6^3}{C_{12}^3}=\dfrac{20}{220}$，

所以 $P\left(A\right)=\sum\limits_{i=0}^{3}P\left(B_i\right)P\left(A|B_i\right)=\dfrac{441}{3025}$.

6.【解析】（1）设事件 A：“第二天开始营业时货架上有 3 箱鲜花饼”，事件 B：“第二天开始营业时货架上有 2 箱鲜花饼”,，事件 C：“第二天结束营业时货架上有 1 箱存货”，

因为第一天结束营业后货架上有 2 箱鲜花饼，故第二天只卖出 1 箱，

故 $P\left(C|B\right)=\dfrac{1}{5}$；

（2）由题意 $P\left(A\right)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{5}$， $P\left(B\right)=\dfrac{1}{5}$， $P\left(C|A\right)=\dfrac{1}{2}$，

由全概率公式得 $P\left(C\right)=P\left(A\right)P\left(C|A\right)+P\left(B\right)P\left(C|B\right)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{11}{25}$.

7.【解析】设 A_1 表示“乙球员担当前锋”， A_2 表示“乙球员担当中锋”， A_3 表示“乙球员担当后卫”， A_4 表示“乙球员担当守门员”，B 表示“当乙球员参加比赛时，球队输球根据题意，则

$P\left(B\right)=P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B|A_3\right)+P\left(A_4\right)P\left(B|A_4\right)$

$=0.2\times0.4+0.5\times0.2+0.2\times0.6+0.1\times0.2=0.32$，所以当乙球员参加比赛时，该球队某场比赛不输球的概率为 $1-0.32=0.68$.

8.【解析】（1）记事件 A_i 表示“任取的一箱为第 i 箱零件”，则 $i=1,2,3$；

记事件 B_j 表示“第 j 次取到的是一等品”，则 $j=1,2$，

由题意得 $P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=P\left(A_3\right)=\dfrac{1}{3}$，

$P(B_1\mid A_1)=\dfrac{20}{50}=0.4$， $P(B_1\mid A_2)=\dfrac{12}{30}=0.4$， $P(B_1\mid A_3)=\dfrac{24}{40}=0.6$，

由全概率公式得：

$P(B_1)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)+P(A_3)P(B_1\mid A_3)=\dfrac{1}{3}\times\left(0.4+0.4+0.6\right)=\dfrac{7}{15}$；

（2） $P(B_1B_2\mid A_1)=\dfrac{C_{20}^2}{C_{50}^2}=\dfrac{38}{245}$， $P(B_1B_2\mid A_2)=\dfrac{C_{12}^2}{C_{30}^2}=\dfrac{22}{145}$， $P(B_1B_2\mid A_3)=\dfrac{C_{24}^2}{C_{40}^2}=\dfrac{23}{65}$，

由全概率公式得：

$P\left(B_1B_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(B_1B_2|A_1\right)+P\left(A_2\right)\cdot P\left(B_1B_2|A_2\right)+P\left(A_3\right)\cdot P\left(B_1B_2|A_3\right)$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{38}{245}+\dfrac{22}{145}+\dfrac{23}{65}\right)=\dfrac{20341}{92365}\approx 0.22$.

题型六：贝叶斯公式及其应用

1.【解析】记 A_i 为事件“零件为第i（$i=1,2,3$）台车床加工，B 为事件“任取一个零件为次品”，

则 $P(A_1)=0.25, P(A_2)=0.3, P(A_3)=0.45,$

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.25\times 0.06+0.3\times 0.05+0.45\times 0.05=0.0525$

所以 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.25\times 0.06}{0.0525}=\dfrac{2}{7}.$

故答案为：$\dfrac{2}{7}.$

2.【解析】设 A_1:第一天去甲餐厅，A_2:第二天去甲餐厅，

B_1:第一天去乙餐厅，B_2:第二天去乙餐厅，

所以 $P(A_1)=0.4$，$P(B_1)=0.6$，$P(A_2|A_1)=0.6, P(A_2|B_1)=0.5$，

因为 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_2)P(A_1|A_2)}{P(A_1)}=0.6, P(A_2|B_1)=\dfrac{P(A_2)P(B_1|A_2)}{P(B_1)}=0.5$，

所以 $P(A_2)P(A_1|A_2)=0.24, P(A_2)P(B_1|A_2)=0.3$，

所以有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.4\times 0.6+0.6\times 0.5=0.54$，

因此选项 A 正确，$P(B_2)=1-P(A_2)=0.46$，因此选项 B 不正确；

因为 $P(B_1|A_2)=\dfrac{0.3}{P(A_2)}=\dfrac{5}{9}$，所以选项 C 正确；

$P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)}=\dfrac{P(A_1)[1-P(A_2|A_1)]}{P(B_2)}=\dfrac{0.4\times(1-0.6)}{0.46}=\dfrac{8}{23}$，所以选项 D 不正确，

故选：AC

3.【解析】设写作能力被评为优秀等级为事件A，每天阅读时间超过1小时为事件 B，

则 $P(A)=30\%=0.3$，$P(B)=20\%=0.2$，$P(A|B)=70\%=0.7$；

$\because P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$，

$\therefore P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A)-P(A|B)P(B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.3-0.7\times 0.2}{1-0.2}=\dfrac{0.16}{0.8}=0.2$，

即从每天阅读时间不超过1小时的学生中随机抽查一名，该生写作能力被评为优秀等级的概率为0.2.

故选：B.

4.【解析】 设B_1，B_2，分别表示事件：任取的产品为甲、乙车间生产，

A="抽取的产品是不合格品"，由条件知

$P(B_1)=0.6$, $P(B_2)=0.4$,

$P(A|B_1)=0.01$, $P(A|B_2)=0.02$,

则该产品是由A车间生产的概率为$P(B1|A)$，

所以$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$

$=\dfrac{0.6\times0.01}{0.6\times0.01+0.4\times0.02}=\dfrac{3}{7}$.

故选：D.

5.【解析】 设B表示"中途停车修理"，A_1表示"经过的是货车"，A_2表示"经过的是客车"，

则$B=A_1B\cup A_2B$，由题意得，$P(A_1)=\dfrac{2}{3}$，$P(A_2)=\dfrac{1}{3}$，$P(B|A_1)=0.02$，$P(B|A_2)=0.01$，

由贝叶斯公式得，$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\dfrac{\frac{2}{3}\times0.02}{\frac{2}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.01}=\dfrac{4}{5}$.

6.【解析】 设事件A表示"被诊断为肺结核"，事件C表示"患有肺结核".

由题意得，$P(C)=0.001$，$P(\overline{C})=0.999$，$P(A|C)=0.95$，$P(A|\overline{C})=0.002$.

由贝叶斯公式得，$P(C|A)=\dfrac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}=\dfrac{475}{1474}$.

题型七：全概率公式与贝叶斯公式的综合应用

1.【解析】设A表示"考生答对"，B表示"考生知道正确答案"，

由全概率公式得$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

又由贝叶斯公式得$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

故选：B

2.【解析】记第一次抽到第 i 号球的事件分别为 $A_i(i=1,2,3)$，则有

$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$，

对于 A，在第一次抽到 2 号球的条件下，则 2 号球放入 2 号盒子内，因此第二次抽到 1 号球的概率为 $P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，A 正确；

对于 B，记第二次在第 i 号盒内抽到 3 号球的事件分别为 $B_i(i=1,2,3)$，而 A_1,A_2,A_3 两两互斥，和为 Ω，

$P(B_1|A_1)=\frac{1}{4},P(B_2|A_2)=\frac{1}{4},P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$，记第二次抽到 3 号球的事件为 B，

$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(B_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$，B 正确；

对于 C，记第二次在第 i 号盒内抽到 1 号球的事件分别为 $C_i(i=1,2,3)$，而 A_1,A_2,A_3 两两互斥，和为 Ω，

$P(C_1|A_1)=\frac{1}{2},P(C_2|A_2)=\frac{1}{2},P(C_3|A_3)=\frac{1}{2}$，记第二次抽到 1 号球的事件为 C，

$P(C)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iC_i)=\sum_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(C_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

第二次的球取自盒子的编号与第一次取的球的号数相同，

$P(A_1|C)=\frac{P(A_1)\cdot P(C_1|A_1)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，$P(A_2|C)=\frac{P(A_2)\cdot P(C_2|A_2)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$,

$P(A_3|C)=\frac{P(A_3)\cdot P(C_3|A_3)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，即第二次抽到的是 1 号球，则它来自 1 号盒子的概率最大，C 不正确；

对于 D，把 5 个不同的小球分成 3 组的不同分组方法数是 $(\mathrm{C}_5^3+\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{A}_2^2})$种，

将每一种分组方法分成的小球放在 3 个盒子中有 A_3^3种不同放法，

由分步乘法计数原理得不同的放法种数是 $(\mathrm{C}_5^3+\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{A}_2^2})\cdot\mathrm{A}_3^3=150$种，D 不正确.

故选：AB

3.【解析】由题意$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{5}$，$P(A_3)=\frac{3}{10}$，

先A_1发生，此时乙袋有 5 个红球，3 个白球和 3 个黑球，则$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$，

先A_2发生，此时乙袋有 4 个红球，4 个白球和 3 个黑球，则$P(B|A_2)=\frac{4}{11}$，

先A_3发生，此时乙袋有 4 个红球，3 个白球和 4 个黑球，则$P(B|A_3)=\frac{4}{11}$，

所以$P(A_1B)=P(B|A_1)P(A_1)=\frac{5}{22}$，B 正确；$P(A_2B)=P(B|A_2)P(A_2)=\frac{4}{55}$，$P(A_3B)=P(B|A_3)P(A_3)=\frac{6}{55}$，

$P\left(B\right)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)=\frac{9}{22}$，C 错误；

则$P(A_1)P(B)\neq P(A_1B)$，$P(A_2)P(B)\neq P(A_2B)$，$P(A_3)P(B)\neq P(A_3B)$，A 错误；

$P\left(A_2|B\right)=\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{8}{45}$，D 正确.

故选：BD

4.【解析】依题意，A_1，A_2和A_3是两两互斥事件，

$P\left(A_1\right)=\frac{5}{5+2+3}=\frac{1}{2}$，$P\left(A_2\right)=\frac{2}{5+2+3}=\frac{1}{5}$，$P\left(A_3\right)=\frac{3}{5+2+3}=\frac{3}{10}$

又$\because P\left(A_1A_2\right)=0\neq P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)$，$\therefore$①②错误；

又$\because P\left(B|A_1\right)=\frac{P\left(BA_1\right)}{P\left(A_1\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{5+3+3}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{11}$，$P\left(B|A_2\right)=\frac{P\left(BA_2\right)}{P\left(A_2\right)}=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{4+4+3}}{\frac{1}{5}}=\frac{4}{11}$，

$P\left(B|A_3\right)=\frac{P\left(BA_3\right)}{P\left(A_3\right)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{4}{4+3+4}}{\frac{3}{10}}=\frac{4}{11}$

$P\left(B\right)=P\left(B|A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)+P\left(B|A_2\right)\cdot P\left(A_2\right)+P\left(B|A_3\right)\cdot P\left(A_3\right)$

$=\frac{5}{11}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{11}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{22}$，③④正确；

$P\left(A_1|B\right)=\frac{P\left(A_1B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{9}{22}}=\frac{5}{9}$，⑤正确；

故答案为：③④⑤.

5.【解析】(1) 设 A_i 表示"第 i 台机床加工的零件"(i=1,2);B 表示"出现废品";C 表示"出现合格品".

$P(C)=P\left(\left(A_1\cap C\right)\cup\left(A_2\cap C\right)\right)=P\left(A_1\cap C\right)+P\left(A_2\cap C\right)$

$=P\left(A_1\right)P\left(C\mid A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(C\mid A_2\right)=\dfrac{2}{3}\times(1-0.03)+\dfrac{1}{3}\times(1-0.02)=\dfrac{73}{75}$.

(2) $P\left(A_2\mid B\right)=\dfrac{P\left(A_2\cap B\right)}{P(B)}=\dfrac{P\left(A_2\right)P\left(B\mid A_2\right)}{P\left(A_1\right)P\left(B\mid A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B\mid A_2\right)}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0.02}{\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.02}=0.25$.

6.【解析】(1) 设事件 A_i 表示"来自第 i 个地区,$i=1,2,3$";事件 B 表示"感染此病".

所以 $P\left(A_1\right)=\dfrac{1}{3}$,$P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{3}$,$P\left(A_3\right)=\dfrac{1}{3}$,

所以 $P\left(B\middle|A_1\right)=\dfrac{1}{7}$,$P\left(B\middle|A_2\right)=\dfrac{1}{5}$,$P\left(B\middle|A_3\right)=\dfrac{1}{4}$.

$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)P\left(B\middle|A_i\right)=\dfrac{83}{420}\approx 0.198$;

(2) $P\left(A_2\middle|B\right)=\dfrac{P\left(A_2\right)P\left(B\middle|A_2\right)}{\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)P\left(B\middle|A_I\right)}=\dfrac{28}{83}\approx 0.337$.

7.【解析】(1) 设使用甲厂生产的配件 M 的比例为 a,则使用乙厂生产的配件 M 的比例为 0.8-a,

由已知可得 $600a+(0.8-a)800+500\times 0.2=640$,解得 a=0.5.

所以需要从甲厂订购配件 M 的数量为 10×0.5=5 万个;

从乙厂订购配件 M 的数量为 $10\times(0.8-0.5)$=3 万个.

(2) 由 (1) 知甲厂、乙厂和本厂自主生产的配件 M 的比例分别为 0.5,0.3,0.2,

所以该汽车厂使用的配件 M 的次品率的估计值为

$0.5\times 0.04+0.3\times 0.02+0.2\times 0.01=0.028$,

所以该厂生产的一辆轿车使用的配件 M 是次品的概率为 0.028.

(3) 设 A="该轿车使用了次品配件 M",$B_1=$"配件 M 来自甲厂",$B_2=$"配件 M 来自乙厂",

$B_3 =$“配件 M 来自本厂”．由（2）可知 $P(A)=0.028$ ．

该次品配件 M 来自甲厂的概率为：$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.5\times0.04}{0.028}=\dfrac{5}{7}$ ，

该次品配件 M 来自乙厂的概率为：$P(B_2|A)=\dfrac{P(AB_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.3\times0.02}{0.028}=\dfrac{3}{14}$ ，

该次品配件 M 来自本厂的概率为：$P(B_3|A)=\dfrac{P(AB_3)}{P(A)}=\dfrac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\dfrac{0.2\times0.01}{0.028}=\dfrac{1}{14}$ ，

所以甲厂应承担的费用为 $14000\times\dfrac{5}{7}=10000$ 元，

乙厂应承担的费用为 $14000\times\dfrac{3}{14}=3000$ 元，

本厂应承担的费用为 $14000\times\dfrac{1}{14}=1000$ 元.

8.【解析】（1）取到次品的概率为 $0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02=0.0345$

（2）若取到的是次品，则：

此次品由甲车间生产的概率为：$\dfrac{0.25\times0.05}{0.0345}=\dfrac{0.0125}{0.0345}=\dfrac{25}{69}$.

此次品由乙车间生产的概率为：$\dfrac{0.35\times0.04}{0.0345}=\dfrac{0.014}{0.0345}=\dfrac{28}{69}$.

此次品由丙车间生产的概率为：$\dfrac{0.4\times0.02}{0.0345}=\dfrac{0.008}{0.0345}=\dfrac{16}{69}$.

9.【解析】设事件 $B=$“任取一个乒乓球是合格品”，事件 $A_1=$“产品取自第一批”，事件 $A_2=$“产品取自第二批”，则 $\Omega=A_1\cup A_2$ 且 A_1,A_2 互斥；

（1）（i）由全概率公式可知：$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$，

所以 $P(B)=0.6\times(1-0.06)+0.4(1-0.05)=0.944$；

（ii）由贝叶斯公式可知：$P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.6\times(1-0.06)}{0.944}=\dfrac{141}{236}$；

（2）由条件可知：X 的可取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=0.6\times0.6=0.36$，

$P(X=1)=C_2^1\times0.6\times0.4=0.48$，

$P(X=2)=0.4\times0.4=0.16$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.36	0.48	0.16

所以 $E\left(X\right)=0\times 0.36+1\times 0.48+2\times 0.16=0.8$.