比赛与闯关问题参考答案

1.（1）思路：依题可知，比赛规则为：只要打错一个即被淘汰，如果从问题的正面考虑，则要考虑到是第几轮被淘汰，情况较多。但此问题的反面为“答对所有问题”，概率易于表示，所以考虑利用对立事件进行求解

设 A_i 为“选手正确回答第 i 轮问题”，事件 A 为“选手被淘汰”

$\therefore P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A_1A_2A_3\right)=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{101}{125}$

（2）思路：ξ 可取的值为 $1,2,3$，可知若想多答题，则需要前面的问题均要答对，所以 $\xi=1$ 时，则第一题答错；$\xi=2$ 时，则第一题答对且第二题答错（若第二题答对则需要答第三题）；$\xi=3$ 时，则第一题答对且第二题答对（第三题无论是否正确，均已答三题），分别求出概率即可

解：ξ 可取的值为 $1,2,3$

$P\left(\xi=1\right)=\frac{1}{5}$ $\qquad$ $P\left(\xi=2\right)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$

$P\left(\xi=3\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{12}{25}$

$\therefore E\xi=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{8}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{57}{25}$

2.（1）思路：解决 P_1,P_2 要通过甲队第一的概率与乙队第一的概率两个条件。若甲队第一名，则甲战胜乙且战胜丙，即 $P_1P_2=\frac{1}{6}$；若乙队第一名，则乙战胜甲且战胜丙，即 $\left(1-P_1\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$，两个方程即可解出 $P_1=\frac{2}{3},P_2=\frac{1}{4}$

解：设事件 A 为“甲队获第一名”，则 $P\left(A\right)=P_1P_2=\frac{1}{6}$

设事件 B 为“乙队获第一名”，则 $P\left(B\right)=\left(1-P_1\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

$\therefore$ 解得：$P_1=\frac{2}{3},P_2=\frac{1}{4}$

（2）思路：依题意可知 X 可取的值为 $0,3,6$，$X=0$ 即两战全负；$X=3$ 即一胜一负，要分成“胜乙负丙”和“负乙胜丙”两种情况讨论；$X=6$ 即两战全胜；分别求出概率即可。

X 可取的值为 $0,3,6$

$\therefore P(X=0)=(1-P_1)(1-P_2)=\frac{1}{4}$

$P(X=3)=P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2=\frac{7}{12}$

$P(X=6)=P_1P_2=\frac{1}{6}$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	3	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore EX=0\times\frac{1}{4}+3\times\frac{7}{12}+6\times\frac{1}{6}=\frac{11}{4}$

3.（1）思路：前四场比赛甲乙比分为 $3:1$，根据 7 场 4 胜制可知，甲再赢一场比赛立刻结束，所以要想获得 $4:2$，$4:3$，必须在甲赢一场之前，乙获得比分。所以若比分为 $4:2$，则第 5 场乙胜，第 6 场甲胜；若比分为 $4:3$，则第 $5,6$ 场均乙胜，第 7 场甲胜，用概率的乘法即可求出两个比分的概率

解：设事件 A_i 为“甲队在第 i 场获胜”，则 $P(A_5)=P(A_6)=\frac{3}{5},P(A_7)=\frac{2}{5}$

设事件 A 为“甲队 4：2 获胜”，事件 B 为“甲队 4：3 获胜”

$\therefore P(A)=P(\overline{A_5}A_6)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$ 　　$P(B)=P(\overline{A_5}\,\overline{A_6}A_7)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125}$

（2）思路：比赛的场数取决于甲是否取胜，所以 X 可取的值为 $5,6,7$，若 $X=5$，则甲 $4:1$ 获胜，即胜第五场；若 $X=6$ 则甲 $4:2$ 获胜，即乙胜第五场，甲胜第六场；若 $X=7$，则只需前六场打成 $3:3$ 即可，所以只需乙连赢两场。分别计算概率即可得到分布列和期望

比赛场数 X 可取的值为 $5,6,7$

$\therefore P(X=5)=P(A_5)=\frac{3}{5}$ 　　$P(X=6)=P(\overline{A_5}A_6)=\frac{6}{25}$

$P(X=7)=P(\overline{A_5}\,\overline{A_6})=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

$\therefore X$ 的分布列为

X	5	6	7

P	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

$\therefore EX=5\times\frac{3}{5}+6\times\frac{6}{25}+7\times\frac{4}{25}=\frac{139}{25}$

4.（1）思路：事件A代表“对弈3局且甲获胜”所以甲必须在第三场获胜，且前两场为一胜一和或一胜一负（胜负先后顺序均可）。按照这几种情况找到对应概率相乘即可

解：设事件A_i为“甲在第i局取胜”，事件B_j为“第j局和棋”，

事件C_k为“乙在第k局取胜”

$$\therefore P\left(A\right)=P\left(A_1\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)+P\left(B_1\overline{B_2}B_3\right)+P\left(\overline{B_1}B_2B_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$

（2）思路：依题意可得只要有两个相同的结果就结束比赛，所以最多进行4次比赛，最少进行2次比赛，故X可取的值为$2,3,4$；在这些值中$X=2,X=4$包含情况较少，$X=2$即为相同的结果出现两次，以甲为研究对象，则情况分为“两胜”，“两负”，“两和”三种情况。$X=4$即为前三场“胜负和”均经历一次，所以概率$P\left(X=4\right)=A_3^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$。对于$X=3$的情况，由于种类较多，所以利用分布列概率和为1的性质用$1-P\left(X=2\right)-P\left(X=4\right)$进行计算

X可取的值为$2,3,4$

$$P\left(X=2\right)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(B_1B_2\right)+P\left(C_1C_2\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(X=4\right)=A_3^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P\left(X=3\right)=1-P\left(X=2\right)-P\left(X=4\right)=\frac{4}{9}$$

$\therefore X$的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore EX=2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{4}{9}+4\times\frac{2}{9}=\frac{26}{9}$

5.（1）思路：若该人获得奖金，则前三关必须通过，后两关可以通过，或者只有一次未通过，借助机会再次通过。分别计算概率再相加即可

解：设事件 A_i 为“第 i 关通过”，事件 A 为“获得奖金”

$$\therefore P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P\left(A_1A_2A_3\overline{A_4}A_4A_5\right)+P\left(A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}A_5\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}$$

（2）思路：依题意可知 X 的取值为 $0,1,2,3,4,5$，其中前三关失败即结束，所以 $X=0$ 为第一关失利； $X=1$ 为第一关通过且第二关失利；$X=2$ 为第二关通过且第三关失利；$X=3$ 为第三关通过且第四关失利两次；$X=4$ 为第四关通过且第五关失利两次；$X=5$ 为五关全部通过获得奖金（即第一问的结果），其中由于 $X=4$ 情况较为复杂，所以考虑利用 $1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)\right]$ 进行处理

X 的取值为 $0,1,2,3,4,5$

$\therefore P(X=0)=P\left(\overline{A_1}\right)=\frac{1}{3}$ $\qquad P(X=1)=P\left(A_1\overline{A_2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=2)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

$P(X=3)=P\left(A_1A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_4}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{27}$

$P(X=5)=P(A)=\frac{4}{27}$

$\therefore P(X=4)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)\right]=\frac{2}{27}$

$\therefore X$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$

$\therefore EX=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{2}{27}+4\times\frac{2}{27}+5\times\frac{4}{27}=\frac{16}{9}$

6.（1）思路：可先设白球个数为 n，已知事件“两球都是白球”的概率，可用古典概型进行表示，进而得到关于 n 的方程，解出 $n=3$

解：设袋中原有白球的个数为 n，事件 A 为“取出两个白球”

$\therefore P\left(A\right)=\frac{C_n^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}\Rightarrow C_n^2=3$ 可解得 $n=3$

（2）思路：尽管题目描述上是甲，乙轮流取球，但进一步分析可发现在取球过程中，一个人的取球结果并不影响下一个人的取球，且所求随机变量为取球完成后，两人结果的比较。所以只需关注甲，乙最后取到的球的个数即可。由（1）可知袋中有 4 个黑球，3 个白球，甲先取球，所以甲取到 4 个球，甲取球的结果可以是：4 黑，1 白 3 黑，2 白 2 黑，3 白 1 黑，对应的分数为 4 分，5 分，6 分，7 分，剩下的球属于乙，所以乙对应的情况为 3 白，2 白 1 黑，1 白 2 黑，3 黑，分数为 6 分，5 分，4 分，3 分。所以甲乙分数差的绝对值 ξ 可取的值为 $0,2,4$，再分别求出概率即可。

ξ 可取的值为 $0,2,4$

$P\left(\xi=0\right)=\frac{C_4^3\cdot C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$　　$P\left(\xi=2\right)=\frac{C_4^4+C_4^2\cdot C_3^2}{C_7^4}=\frac{19}{35}$

$P\left(\xi=4\right)=\frac{C_4^1\cdot C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	2	4
P	$\frac{12}{35}$	$\frac{19}{35}$	$\frac{4}{35}$

$\therefore E\xi=200\times\frac{12}{35}+2\times\frac{19}{35}+4\times\frac{4}{35}=\frac{54}{35}$

7.（1）思路：若甲能进入复赛，则要答对三道题，但因为答对 3 题后立即终止比赛，所以要通过最后一次答题正确进入复赛。答题的次数为 3 次，4 次，5 次，答题 3 次即为全对，答题 4 次，则要在前 3 次答对 2 题，即 $C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$，然后第 4 题正确进入复赛；同理，答题 5 次时，要在前 4 次中答对 2 题，即 $C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$，然后第 5 题正确。

解：设事件 A 为“甲进入复赛”

$\therefore P\left(A\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}+C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{459}{512}$

（2）思路：首先甲最少答3题，最多答5题，故X可取的值为$3,4,5$，要注意答题结束分为进入复赛和淘汰两种情况。当甲答3道题时，可能全对或全错；同理甲答4道题时，可能3对1错或是3错1对；当甲答5道题时，只要前4题2对2错，无论第5题结果如何，均答了5道题。分别计算对应概率即可得到X的分布列，从而计算出EX

解：X可取的值为$3,4,5$

$$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$$

$$P(X=4)=C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{128}$$

$$P(X=5)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$$

$\therefore X$的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{5}{32}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{27}{128}$

$\therefore EX=3\times\frac{5}{32}+4\times\frac{45}{128}+5\times\frac{27}{128}=\frac{483}{128}$

8.（1）思路：依题意可知获胜的要求是连胜2场，所以可分2局，3局，4局三种情况，通过后两场连胜赢得比赛，其余各场按“胜负交替”进行排列

解：设A_i为“甲在第i局获胜”，事件A为“甲在4局以内（含4局）赢得比赛”

$$\begin{aligned}\therefore P(A)&=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)\\&=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{56}{81}\end{aligned}$$

（2）思路：首先依题意能确定X可取的值为$2,3,4,5$，若提前结束比赛，则按（1）的想法，除了最后两场要连胜（或连败），其余各场应“胜负交替”。在每个事件中要分甲获胜和乙获胜两种情况进行讨论

解：X可取的值为$2,3,4,5$

$$P(X=2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$P(X=3)=P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)+P\left(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

$P(X=4)=P\left(A_1\overline{A_2}A_3A_4\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\overline{A_4}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{81}$

$P(X=5)=P\left(A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

$\therefore X$ 的分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$

$\therefore EX=2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{10}{81}+5\times\frac{8}{81}=\frac{224}{81}$

9.（1）思路：$\xi=2$ 代表比赛经过 2 次就结束，说明甲连胜两局或者乙连胜两局，进而可计算出概率

解：设事件 A_i 为“甲在第 i 局获胜”

$\therefore P(\xi=2)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(\overline{A_1}\overline{A_2}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

（2）思路：考虑 ξ 可取的值只能是 $2,4,6$（因为奇数局不会产生多赢 2 分的情况），当 $\xi=4$ 时，即甲乙比分为 $3:1$ 或是 $1:3$（在第 4 局完成多两分），所以只能是在前两局打成 $1:1$，然后一方连赢两局结束比赛。计算出 $P(\xi=2),P(\xi=4)$，即可求出 $P(\xi=6)$

解：ξ 可取的值为 $2,4,6$

$P(\xi=2)=\frac{5}{9}$

$P(\xi=4)=P\left(A_1\overline{A_2}A_3A_4\right)+P\left(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2A_3A_4\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\overline{A_4}\right)$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{20}{81}$$

$P(\xi=6)=1-P(\xi=2)-P(\xi=4)=\frac{16}{81}$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	2	4	6
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{16}{81}$

$\therefore E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$

10.（1）思路：本题甲获胜的概率取决于谁先发球，即为发球权确定的前提下的条件概率。若甲获得发球权，则获胜的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，如果甲没有发球权，则获胜的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以甲获胜的概率为$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

解：设事件A为"甲获得胜利"

$\therefore P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

（2）思路：本题要注意发球权的不同，所使用的概率也不一样，所以要确定每一局的胜负以决定下一局甲获胜的概率。比赛实行三局两胜，所以甲可能的得分为$4,2,0$，若甲的得分为4分，则为连胜两局结束比赛或2:1赢得比赛，胜利的情况分为"甲甲"，"甲乙甲"，"乙甲甲"三种情况，结合着发球规则可得：$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$，依次类推便可计算出其它情况的概率，进而得到分布列

解：ξ可取的值为$4,2,0$

$\xi=4$时，比赛的结果为："甲甲"，"甲乙甲"，"乙甲甲"

$\therefore P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

$\xi=2$时，比赛的结果为："乙甲乙"，"甲乙乙"

$\therefore P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$\xi=0$时，比赛的结果为："乙乙"

$\therefore P(\xi=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\xi$的分布列为：

ξ	0	2	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$

$$\therefore E\left(\xi\right)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{7}{12}=\frac{17}{6}$$