1.【答案】记事件 A 表示从第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个盒子中取出白球,则 $P(A_1)=\frac{2}{3},P\left(\overline{A_1}\right)=\frac{1}{3}$,

$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A})P(A_2|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$,

$P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P\left(\overline{A_2}\right)P\left(A_3|\overline{A_2}\right)=\frac{1}{3}P(A_2)+\frac{1}{3}=\frac{14}{27}$,

$P(A_4)=P(A_3)P(A_4|A_3)+P\left(\overline{A_3}\right)P\left(A_4|\overline{A_3}\right)=\frac{1}{3}P(A_3)+\frac{1}{3}$,

$P(A_h)=\frac{1}{3}P(A_{h-1})+\frac{1}{3},P(A_h)-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left[P(A_{h-1})-\frac{1}{2}\right],P(A_l)-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$\left\{P(A_n)-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, $P(A_n)-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$,

$P(A_n)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{2}$.

2.【解析】

记第 n 次传球后球在甲手中的概率为 P_n ,则第 $n-1$ 次传球后球在甲手中的概率为 P_{n-1} ,

开始时球在甲手中,则 $P_0=1$.

若第 n 次传球后球在甲手中,则第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中,即第 $n-1$ 次传球后球在乙或丙手中,

所以第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中的概率为 $1-P_{n-1}$,又乙或丙在第 n 次把球传到甲手上的概率为 $\frac{1}{2}$,

于是有 $\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=P_n$,即 $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{1}{3}\right), n\geq 1$,

于是数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $P_0-1=\frac{2}{3}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 得等比数列,

所以 $P_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $P_n=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}(n\in N^*)$.

3【答案】 $\frac{11}{24}$, $p_n=\begin{cases}\left(\frac{11}{24}\right)^k, n=3k, k\in N\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k, n=3k+1, k\in N\\ \frac{5}{12}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k, n=3k+2, k\in N\end{cases}$

【分析】结合相互独立事件的概率乘法公式和互斥事件的概率加法公式，结合题意，利用列举法和分类讨论，即可求解.

【详解】由题意，当投掷 3 次骰子后，球在甲手中，共有 4 中情况:

①：甲→甲→甲→甲→甲,其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

②：甲 → 甲 → 乙 → 甲,其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

③：甲→乙→甲→甲,其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

④：甲 → 乙 → 丙 → 甲,其概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

所以投掷 3 次后,球在甲手中的概率为 $p_3=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{11}{24}$.

记当投掷 $n-3$ 次骰子后,球在甲手中的概率为 p_{n-3} ,

再三次投掷后,即投掷 n 次,球仍在甲手中的概率为 p_n ,

则 $p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^3 p_{n-3}+\frac{1}{6}p_{n-3}\times\frac{1}{2}\times 2+p_{n-3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}p_{n-3}+\frac{1}{12}p_{n-3}+\frac{1}{12}p_{n-3}+\frac{1}{6}p_{n-3}=\frac{11}{24}p_{n-3}$,

即 $p_n=\frac{11}{24}p_{n-3}$,

即 $\frac{p_n}{p_{n-3}}=\frac{11}{24}$

又因为 $p_0=1,p_1=\frac{1}{2},p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12},p_3=\frac{11}{24}$,

当 $n=3k,k\in N$ 时, $p_n=\left(\frac{11}{24}\right)^n$; 当 $n=3k+1,k\in N$ 时, $p_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k$;

当 $n=3k+2,k\in N$ 时, $p_n=\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k$,

所以 $p_n=\begin{cases}\left(\frac{11}{24}\right)^k,n=3k,k\in N\\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k,n=3k+1,k\in N\\ \frac{5}{12}\cdot\left(\frac{11}{24}\right)^k,n=3k+2,k\in N\end{cases}$.

4【详解】(1) 记该顾客第 $i(i \in N^*)$ 次摸球抽中奖品为事件 A ,依题意, $P_1=\frac{2}{7}$,

$$P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42}.$$

因为 $P(A_n|A_{n-1})=\frac{1}{3}, P(A_n|\overline{A_{n-1}})=\frac{1}{2}, P_n=P(A_n)$,

所以 $P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}})$,

所以 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}$,

所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_{n-1}-\frac{3}{7}\right)$,

又因为 $P_1=\frac{2}{7}$,则 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}\neq 0$,

所以数列 $\left\{P_n-\frac{3}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{7}$,公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列,

故 $P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

(2)证明:当 n 为奇数时, $P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7\cdot 6^{n-1}}<\frac{3}{7}<\frac{19}{42}$,

当 n 为偶数时, $P_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\cdot 6^{n-1}}$,则 P_n 随着 n 的增大而减小,

所以, $P_n\leq P_2=\frac{19}{42}$,综上,该顾客第二次摸球抽中奖品的概率最大.

5.【详解】(1) 由题可知: $p_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9},q_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(2) n 次操作后,甲盒有一个黑球的概率 $P(X_n=1)=1-p_n-q_n$,由全概率公式知:

$$P(X_{n+1}=2)=P(X_n=1)P(X_{n+1}=2|X_n=1)+P(X_n=2)P(X_{n+1}=2|X_n=2)$$
$$+P(X_n=3)P(X_{n+1}=2|X_n=3)$$

$$\therefore p_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot(1-p_n-q_n)+\frac{5}{9}p_n+1\cdot\frac{2}{3}q_n$$

$$\therefore p_{n+1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}p_n$$

$$P(X_{n+1}=3)=P(X_n=2)P(X_{n+1}=3|X_n=2)+P(X_n=3)P(X_{n+1}=3|X_n=3)$$

$$\therefore q_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}p_n+1\cdot\frac{1}{3}q_n$$

$$\therefore q_{n+1}=\frac{2}{9}p_n+\frac{1}{3}q_n$$

$$\therefore p_{n+1}+2q_{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n=\frac{1}{3}(p_n+2q_n)+\frac{2}{3},$$

即 $c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}$

(3) $\because c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3},\quad\therefore c_{n+1}-1=\frac{1}{3}(c_n-1)$

又 $\because c_1=p_1+2q_1=\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9}=1$,

$\therefore c_n-1=c_{n-1}-1=\cdots=0$ 即 $c_n=p_n+2q_n=1$

$\therefore E(X_n) = 1 \cdot (1 - p_n - q_n) + 2p_n + 3q_n = 1 + p_n + 2q_n = 2$

6.【解析】(1)记“第 i 次投篮的人是甲”为事件 A_1 ,“第 i 次投篮的人是乙”为事件 B_i ,

所以, $P(B_2) = P(A_1B_2) + P(B_1B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1)$

$= 0.5 \times (1 - 0.6) + 0.5 \times 0.8 = 0.6$.

(2)设 $P(A_1) = p_i$,依题可知, $P(B_i) = 1 - p_i$,则

$P(A_{t+1}) = P(A_tA_{t+1}) + P(B_iA_{t+1}) = P(A_t)P(A_{t+1}|A_t) + P(B_i)P(A_{t+1}|B_i)$,

即 $p_{i+1} = 0.6p_i + (1 - 0.8) \times (1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2$,

构造等比数列 $\{p_i + \lambda\}$,

设 $p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$,解得 $\lambda = -\frac{1}{3}$,则 $p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left(p_i - \frac{1}{3}\right)$,

又 $p_1 = \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,所以 $\left\{p_i - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$,公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列,

即 $p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$.

(3)因为 $p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}, i = 1,2,\cdots,n$,

所以当 $n \in N^*$ 时, $E(Y) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$,

故 $E(Y) = \frac{5}{18}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$.