计数原理、排列组合运用专题参考答案

1. 解析：完成此事共分 6 步，第一步；将第一名实习生分配到车间有 7 种不同方案，第二步：将第二名实习生分配到车间也有 7 种不同方案，依次类推，由分步计数原理知共有 $7^6$ 种不同方案.

2. 解析：老师在中间三个位置上选一个有 $A_3^1$ 种，4 名同学在其余 4 个位置上有 $A_4^4$ 种方法；所以共有 $A_3^1A_4^4=72$ 种。

3.答案　420

**解析**　要完成的“一件事”为“组成无重复数字的四位偶数”，所以千位数字不能为 0，个位数字必须是偶数，且组成的四位数中四个数字不重复，因此应先分类，再分步.

第 1 类，当千位数字为奇数，即取 1，3，5 中的任意一个时，个位数字可取 0，2，4，6 中的任意一个，百位数字不能取与这两个数字重复的数字，十位数字不能取与这三个数字重复的数字.

根据分步乘法计数原理，有 3×4×5×4＝240(种)取法.

第 2 类，当千位数字为偶数，即取 2，4，6 中的任意一个时，个位数字可以取除首位数字的任意一个偶数数字，百位数字不能取与这两个数字重复的数字，十位数字不能取与这三个数字重复的数字.

根据分步乘法计数原理，有 3×3×5×4＝180(种)取法.

根据分类加法计数原理，共可以组成 240＋180＝420(个)无重复数字的四位偶数.

4. 解析：把 $A,B$ 视为一人，且 $B$ 固定在 $A$ 的右边，则本题相当于 4 人的全排列，$A_4^4=24$ 种

5. 解析：除甲乙外，其余 5 个排列数为 $A_5^5$ 种，再用甲乙去插 6 个空位有 $A_6^2$ 种，不同的排法种数是 $A_5^5A_6^2=3600$

6. 解析：$B$ 在 $A$ 的右边与 $B$ 在 $A$ 的左边排法数相同，所以题设的排法只是 5 个元素全排列数的一半，即 $\frac{1}{2}A_5^5=60$ 种，

7. 解析：（1）前后两排可看成一排的两段，因此本题可看成 6 个不同的元素排成一排，共 $A_6^6=720$ 种

（2）解析：看成一排，某 2 个元素在前半段四个位置中选排 2 个，有 $A_4^2$ 种，某 1 个元素排在后半段的四个位置中选一个有 $A_4^1$ 种，其余 5 个元素任排 5 个位置上有 $A_5^5$ 种，故共有 $A_4^1A_4^2A_5^5=5760$ 种排法.

8. 解析：首先可让 5 位姐姐站成一圈，属圆排列有 $A_4^4$ 种，然后在让插入其间，每位均可插入其姐姐的左边和右边，有 2 种方式，故不同的安排方式 $24\times 2^5=768$ 种不同站法. 说明：从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素作圆形排列共有 $\frac{1}{m}A_n^m$ 种不同排法.

9. 解析：先把 1 填入方格中，符合条件的有 3 种方法，第二步把被填入方格的对应数字填入其它三个方格，又有三种方法；第三步填余下的两个数字，只有一种填法，共有 3×3×1=9 种填法，

10. 解析：因为甲乙有限制条件，所以按照是否含有甲乙来分类，有以下四种情况：

①若甲乙都不参加，则有派遣方案 $A_8^4$ 种；②若甲参加而乙不参加，先安排甲有 3 种方法，然后安排其余学生有 $A_8^3$ 方法，所以共有 $3A_8^3$；③若乙参加而甲不参加同理也有 $3A_8^3$ 种；④若甲乙都参加，则先安排甲乙，有 7 种方法，然后再安排其余 8 人到另外两个城市有 $A_8^2$ 种，共有 $7A_8^2$ 方法. 所以共有不同的派遣方法总数为

$A_8^4+3A_8^3+3A_8^3+7A_8^2=4088$ 种.

11.【解析】：（1）平均分组 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$ ；（2）平均分配 $C_6^2C_4^2C_2^2$ ；（3）不平均分组 $C_6^1C_5^2C_3^3$；

（4）不平均分配 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3$ ；（5）部分平均分组 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}$；（6）部分平均分配 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3$；

（7）3+1+1+1 或 2+2+1+1 $\frac{C_6^3C_3^1C_2^1C_1^1}{A_3^3}A_4^4+\frac{C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2A_2^2}A_4^4$；（8）先选后分配

$\frac{C_6^3C_3^1C_2^1}{A_2^2}A_3^3+\frac{C_6^2C_4^2C_2^1}{A_2^2}A_3^3$；（9）特殊元素不平均 $C_2^2C_4^1C_3^3A_2^2$；（10）特殊元素平均 $C_2^1C_4^2C_1^1C_2^2$

12. 解析：10 个名额分到 7 个班级，就是把 10 个名额看成 10 个相同的小球分成 7 堆，每堆至少一个，可以在 10 个小球的 9 个空位中插入 6 块木板，每一种插法对应着一种分配方案，故共有不同的分配方案为 $C_9^6=84$ 种.

14 解析：把此问题当作一个排对模型，在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 盏不亮的灯 $C_5^3$ 种方法, 所以满足条件的关灯方案有 10 种.

15 解析　甲有 7 种站法，乙有 7 种站法，丙有 7 种站法，故不考虑限制共有 7×7×7＝343(种)站法，其中三个人站在同一级台阶上有 7 种站法，故符合本题要求的不同站法有 343－7＝336(种).

16.（1）解析：解析 1：逆向思考，至少各一台的反面就是分别只取一种型号，不取另一种型号的电视机，故不同的取法共有 $C_9^3-C_4^3-C_5^3=70$ 种

解析 2：至少要甲型和乙 型电视机各一台可分两种情况：甲型 1 台乙型 2 台；甲型 2 台乙型 1 台；故不同的取法有 $C_5^2C_4^1+C_5^1C_4^2=70$ 台，选 $C$.

（2）正方体 8 个顶点从中每次取四点，理论上可构成 $C_8^4$ 四面体，但 6 个表面和 6 个对角面的四个顶点共面都不能构成四面体，所以四面体实际共有 $C_8^4-12=58$ 个.

（3）解析：10 个点中任取 4 个点共有 $C_{10}^4$ 种，其中四点共面的有三种情况：①在四面体的四个面上，每面内四点共面的情况为 $C_6^4$，四个面共有 $4C_6^4$ 个；②过空间四边形各边中点的平行四边形共 3 个；③过棱上三点与对棱中点的三角形共 6 个. 所以四点不共面的情况的种数是 $C_{10}^4-4C_6^4-3-6=141$ 种.

17. 解析：因为圆的一个内接四边形的两条对角线相交于圆内一点，一个圆的内接四边形就对应着两条弦相交于圆内的一个交点，于是问题就转化为圆周上的 10 个点可以确定多少个不同的四边形，显然有 $C_{10}^4$ 个，所以圆周上有 10 点，以这些点为端点的弦相交于圆内的交点有 $C_{10}^4$ 个.

（2）解析：可将图中矩形的一边叫一小段，从 $A$ 到 $B$ 最短路线必须走 7 小段，其中：向东 4 段，向北 3 段；而且前一段的尾接后一段的首，所以只要确定向东走过 4 段的走法，便能确定路径，因此不同走法有 $C_7^4$ 种.

18.

（1）分析：依题意至少要用 3 种颜色

1) 当先用三种颜色时，区域 2 与 4 必须同色，

区域 3 与 5 必须同色，故有 $A_4^3$ 种；

2) 当用四种颜色时，若区域 2 与 4 同色，

则区域 3 与 5 不同色，有 $A_4^4$ 种；若区域 3 与 5 同色，则区域 2 与 4 不同色，有 $A_4^4$ 种，故用四种颜色时共有 2 $A_4^4$ 种。由加法原理可知满足题意的着色方法共有 $A_4^3$+2 $A_4^4$ =24+2×24=72

（2）分析：依题意只能选用 4 种颜色，要分五类：

（1）②与⑤同色、④与⑥同色，则有 $A_4^4$；

（2）③与⑤同色、④与⑥同色，则有 $A_4^4$；

（3）②与⑤同色、③与⑥同色，则有 $A_4^4$；

（4）③与⑤同色、② 与④同色，则有 $A_4^4$；

（5）②与④同色、③与⑥同色，则有 $A_4^4$；

所以根据加法原理得涂色方法总数为 5 $A_4^4$=120

（3）解法一：满足题设条件的染色至少要用三种颜色。

（1）若恰用三种颜色，可先从五种颜色中任选一种染顶点 S，再从余下的四种颜色中任选两种涂 A、B、C、D 四点，此时只能 A 与 C、B 与 D 分别同色，故有 $C_5^1A_4^2=60$ 种方法。

（2）若恰用四种颜色染色，可以先从五种颜色中任选一种颜色染顶点 S，再从余下的四种颜色中任选两种染 A 与 B，由于 A、B 颜色可以交换，故有 $A_4^2$ 种染法；再从余下的两种颜色中任选一种染 D 或 C，而 D 与 C，而 D 与 C 中另一个只需染与其相对顶点同色即可，故有 $C_5^1A_4^2C_2^1C_2^1=240$ 种方法。

（3）若恰用五种颜色染色，有 $A_5^5=120$ 种染色法

综上所知，满足题意的染色方法数为 60+240+120=420 种。

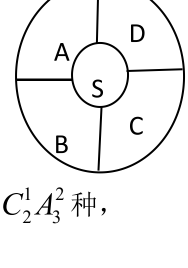
解法二：设想染色按 S—A—B—C—D 的顺序进行，对 S、A、B 染色，有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法。

由于 C 点的颜色可能与 A 同色或不同色，这影响到 D 点颜色的选取方法数，故分类讨论：

C 与 A 同色时（此时 C 对颜色的选取方法唯一），D 应与 A（C）、S 不同色，有 3 种选择；C 与 A 不同色时，C 有 2 种选择的颜色，D 也有 2 种颜色可供选择，从而对 C、D 染色有 $1\times3+2\times2=7$ 种染色方法。由乘法原理，总的染色方法是 $60\times7=420$

解法三：可把这个问题转化成相邻区域不同色问题：如图，

对这五个区域用 5 种颜色涂色，有多少种不同的涂色方法？




（4）解法一：（1）使用四颜色共有 $A_4^4$ 种;

（2）使用三种颜色涂色，则必须将一组对边染成同色，故有 $C_4^1C_2^1A_3^2$ 种，

（3）使用二种颜色时，则两组对边必须分别同色，有 $A_4^2$ 种

因此，所求的染色方法数为 $A_4^4+C_4^1C_2^1A_3^2+A_4^2=84$ 种

解法二：涂色按 AB－BC－CD－DA 的顺序进行，对 AB、BC 涂色有 $4\times3=12$ 种涂

色方法。

由于 CD 的颜色可能与 AB 同色或不同色，这影响到 DA 颜色的选取方法数，故分类讨论：　当 CD 与 AB 同色时，这时 CD 对颜色的选取方法唯一，则 DA 有 3 种颜色可供选择 CD 与 AB 不同色时，CD 有两种可供选择的颜色，DA 也有两种可供选择的颜色，从而对 CD、DA 涂色有$1\times3+2\times2=7$种涂色方法。

由乘法原理，总的涂色方法数为$12\times7=84$种