马尔科夫链（与数列结合的概率递推问题）

1. 有 n 个编号分别为 $1,2,3,\cdots,n$ 的盒子,第 1 个盒子中有 2 个白球 1 个黑球,其余盒子均为 1 个白球 1 个黑球, 现从第 1 个盒中任取一球放入第 2 个盒子, 再从第 2 个盒子中任取一球放入第 3 个盒子, 以此类推,则从第 2 个盒子中取到白球的概率是_____,从第 n 个盒子中取到白球的概率是_____.

2. 甲、乙、丙三人相互做传球训练,第 1 次由甲将球传出,每次传球时,传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人. 求 n 次传球后球在甲手中的概率.

3. 甲,乙,丙三人进行传球游戏,每次投掷一枚质地均匀的正方体骰子决定传球的方式:当球在甲手中时, 若骰子点数大于 3 ,则甲将球传给乙,若点数不大于 3 ,则甲将球保留；当球在乙手中时,若骰子点数大于 4,则乙将球传给甲,若点数不大于 4,则乙将球传给丙；当球在丙手中时,若骰子点数大于 3, 则丙将球传给甲,若骰子点数不大于 3 ,则丙将球传给乙. 初始时,球在甲手中,投掷 n 次骰子后

$(n \in N^*)$,

记球在甲手中的概率为 p_n ,则 $p_3 =$ _____； $p_n =$ _____.

4. 某品牌女装专卖店设计摸球抽奖促销活动,每位顾客只用一个会员号登陆,每次消费都有一次随机摸球的机会. 已知顾客第一次摸球抽中奖品的概率为 $\frac{2}{7}$ ；从第二次摸球开始,若前一次没抽中奖品,则这次抽中的概率为 $\frac{1}{2}$,若前一次抽中奖品,则这次抽中的概率为 $\frac{1}{3}$. 记该顾客第 n 次摸球抽中奖品的概率为 P_n .

(1)求 P_2 的值,并探究数列 $\{P_n\}$ 的通项公式;

(2)求该顾客第几次摸球抽中奖品的概率最大, 请给出证明过程.

5. 甲、乙两个盒子中都装有大小、形状、质地相同的 2 个黑球和 1 个白球,现从甲、乙两个盒子中各任取

一个球交换放入另一个盒子中,重复 $n(n\in N^*)$ 次这样的操作后,记甲盒子中黑球的个数为 X_n ,甲盒中

恰有 2 个黑球的概率为 p_n ,恰有 3 个黑球的概率为 q_n .

(1)求 p_1,q_1 ；

(2) 设 $c_n=p_n+2q_n$,证明: $c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}$;

(3) 求 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ 的值.

6. 乙两人投篮,每次由其中一人投篮,规则如下:若命中则此人继续投篮,若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8 . 由抽签确定第 1 次投篮的人选,第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5 .

(1)求第 2 次投篮的人是乙的概率；

(2)求第 i 次投篮的人是甲的概率；

(3)已知:若随机变量 X_i 服从两点分布,且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i,i=1,2,\cdots,n$,则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$. 记前 n 次(即从第 1 次到第 n 次投篮)中甲投篮的次数为 Y ,求 $E(Y)$.