概率与统计拓展综合运用参考答案

**类型一　与函数的综合**

1.【解析】设顾客参与两次甲游戏后，获得的分数为$X$，设顾客参与两次乙游戏后，获得的分数为$Y$.

（1）当$X$取值为140，80，50，20时，顾客参与两次甲游戏后可以获得奖品，由条件得

$P\left(X=140\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ $P\left(X=80\right)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P\left(X=50\right)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

$P\left(X=20\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

记事件$A$为“顾客参与两次甲游戏后获得奖品”，

则$P\left(A\right)=P\left(X=140\right)+P\left(X=80\right)+P\left(X=50\right)+P\left(X=20\right)=\frac{5}{12}$.

当$Y$取值为160，60时，顾客参与两次乙游戏后可以获得奖品，由条件得

$P\left(Y=160\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，$P\left(Y=60\right)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

记事件$B$为“顾客参与两次乙游戏后获得奖品”，

则$P\left(B\right)=P\left(Y=160\right)+P\left(Y=60\right)=\frac{7}{16}$，因为$P\left(A\right)<P\left(B\right)$，所以当$p=\frac{1}{4}$时，顾客选择乙游戏更容易获得奖品.

（2）由题意可知，$X$的可能取值为140，80，50，20，-10，-40，则随机变量$X$的分布列为

| $X$ | 140 | 80 | 50 | 20 | −10 | −40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

于是$EX=140\times\frac{1}{36}+80\times\frac{1}{9}+50\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{9}+\left(-10\right)\times\frac{1}{3}+\left(-40\right)\times\frac{1}{4}=10$.

由条件知，$Y$的可能取值为160，60，-40，故随机变量$Y$的分布列为

| $Y$ | 160 | 60 | −40 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p^2$ | $2p\left(1-p\right)$ | $\left(1-p\right)^2$ |

于是$EY=160p^2+120p\left(1-p\right)-40\left(1-p\right)^2$.

为满足题设条件只需$EY>EX$，即$160p^2+120p\left(1-p\right)-40\left(1-p\right)^2>10$，解得$p>\frac{1}{4}$，

故 $p$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4},1\right)$.

2.【解析】(1) $\overline{X}=105\times0.1+115\times0.2+125\times0.3+135\times0.25+145\times0.15=126.5$,

$X_{中}=120+\frac{0.5-0.1-0.2}{0.3}\times10=126\frac{2}{3}$,

$X_{众}=125$,

(2) $T=\begin{cases}800X-36000, & 100\le X<120\\ 60000, & 120\le X\le150\end{cases}$,

利润 $T$ 的分布列为

| $T$ | 48000 | 56000 | 60000 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.2 | 0.7 |

$ET=48000\times0.1+56000\times0.2+60000\times0.7=58000$(元).

**类型二　与导数综合**

1.【解析】(1) 因为一篇学位论文初评被认定为"存在问题学位论文"的概率为

$C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3$,

一篇学位论文复评被认定为"存在问题学位论文"的概率为 $C_3^1p(1-p)^2\left[1-(1-p)^2\right]$,

所以一篇学位论文被认定为"存在问题学位论文"的概率为

$f(p)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3+C_3^1p(1-p)^2\left[1-(1-p)^2\right]$

$=3p^2(1-p)+p^3+3p(1-p)^2\left[1-(1-p)^2\right]$

$=-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$.

(2) 设每篇学位论文的评审费为 $X$ 元，则 $X$ 的可能取值为 900，1500.

$P(X=1500)=C_3^1p(1-p)^2$，　$P(X=900)=1-C_3^1p(1-p)^2$,

所以 $E(X)=900\times\left[1-C_3^1p(1-p)^2\right]+1500\times C_3^1p(1-p)^2$

$=900+1800p(1-p)^2$.

令 $g(p)=p(1-p)^2, p\in(0,1)$,

$g'(p)=(1-p)^2-2p(1-p)=(3p-1)(p-1)$.

当 $p\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时，$g'(p)>0$，$g(p)$ 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 单调递增,

当 $p\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ 时，$g'(p)<0$，$g(p)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 单调递减,

所以 $g(p)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$.

所以实施此方案，最高费用为 $100+6000\times\left(900+1800\times\frac{4}{27}\right)\times10^{-4}=800$（万元）.

综上，若以此方案实施，不会超过预算.

2.【解析】（1）依题意，10头成年牛中恰有3头感染H型疾病的概率是

$f(p)=C_{10}^{3}p^{3}(1-p)^{7}$，且 $0<p<1$.

则有 $f'(p)=C_{10}^{3}[3p^{2}(1-p)^{7}-7p^{3}(1-p)^{6}]=C_{10}^{3}p^{2}(1-p)^{6}(3-10p)$,

令 $f'(p)=0$，结合 $0<p<1$，解得 $p=0.3$.

则当 $p\in(0,0.3)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in(0.3,1)$ 时，$f'(p)<0$.

即函数 $f(p)$ 在 $(0,0.3)$ 上单调递增，在 $(0.3,1)$ 上单调递减，

故当概率 $p=0.3$ 时，$f(p)$ 有最大值.

（2）$10$ 头成年牛中恰有 $k$ 头感染H型疾病的概率是

$g(k)=C_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k}$（$k=0,1,2,\cdots,10$），

由（1）知 $p=0.3$,

所以 $\frac{g(k)}{g(k-1)}=\frac{C_{10}^{k}p^{k}(1-p)^{10-k}}{C_{10}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{11-k}}=\frac{C_{10}^{k}p}{C_{10}^{k-1}(1-p)}=\frac{10!}{k!(10-k)!}\cdot\frac{(k-1)!(11-k)!}{10!}\cdot\frac{p}{1-p}=\frac{11-k}{k}\cdot\frac{p}{1-p}$

$=\frac{3.3-0.3k}{0.7k}=1+\frac{3.3-k}{0.7k}$,

所以当 $3.3-k>0$，即 $k<3.3(k\in N)$ 时，$\frac{g(k)}{g(k-1)}>1$，$g(k)>g(k-1)$,

当$3.3-k<0$，即$k>3.3$（$k\le 10$，且$k\in N$）时，$g(k)<g(k-1)$，

于是$g(0)<g(1)<g(2)<g(3)>g(4)>\cdots>g(10)$，

所以当$k=3$时，$g(k)$有最大值.

**类型三　与数列综合**

1.【解析】(1) 因为该同学通过各校考试的概率均为$p$，所以该同学恰好通过$m(1\le m\le 10)$

所高校自主招生考试的概率为$f(p)=C_{10}^{m}p^{m}(1-p)^{10-m}$

$f'(p)=C_{10}^{m}[mp^{m-1}(1-p)^{10-m}-(10-m)p^{m}(1-p)^{9-m}]$

$=C_{10}^{m}p^{m-1}(1-p)^{9-m}[m(1-p)-(10-m)p]$

$=C_{10}^{m}p^{m-1}(1-p)^{9-m}(m-10p)$

当$0\le p\le \frac{m}{10}$时，$f'(p)\ge 0$，$f(p)$递增；

当$\frac{m}{10}\le p\le 1$时，$f'(p)\le 0$，$f(p)$递减；

所以当$p=\frac{m}{10}$时，$f(p)$取得最大值.

(2) 设该同学共参加了$i$次考试的概率为$P_i(1\le i\le 10, i\in Z)$.

$\because P_i=\begin{cases}\frac{1}{2^i}, 1\le i\le 9, i\in Z\\ \frac{1}{2^9}, i=10\end{cases}$，

$\therefore$所以该同学参加考试所需费用$\xi$的分布列如下：

| $\xi$ | $a$ | $2a$ | $3a$ | $4a$ | $5a$ | $6a$ | $7a$ | $8a$ | $9a$ | $10a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{1}{2^6}$ | $\frac{1}{2^7}$ | $\frac{1}{2^8}$ | $\frac{1}{2^9}$ | $\frac{1}{2^9}$ |

所以 $E\xi=\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\ldots+\frac{1}{2^9}\times 9+\frac{1}{2^9}\times 10\right)a$，

令 $S=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\ldots+\frac{1}{2^9}\times 9$，①

则 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}\times 1+\frac{1}{2^3}\times 2+\ldots+\frac{1}{2^9}\times 8+\frac{1}{2^{10}}\times 9$，②

由①-②得 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{10}}\times 9$，

所以 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^9}\times 9$，

所以 $E\xi=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^9}\times 9+\frac{1}{2^9}\times 10\right)a=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^9}\right)a$

$=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}a=2\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)a=\frac{1023}{512}a$（元）.

2.【详解】（1）$P_2(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P_2(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_2(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P_3(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_3(B)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P_3(C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

综上，

| 棋子位置<br>掷骰子次数 | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

（2）随机变量 $X_4$ 的可能数值为 1，$-\frac{1}{2}$.

综合（1）得

$P\left(X_4=1\right)=\left(P_3(B)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，

$$P\left(X_4=-\frac{1}{2}\right)=\left(P_3(A)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(P_3(A)+P_3(B)\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8},$$

故随机变量$X_4$的分布列为

| | | |
|---|---|---|
| $X_4$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ |
| $P$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}$ |

$E\left(X_4\right)=1\times\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{16}$.

（3）易知$b_n=c_n$，因此，$b_{n-1}=c_{n-1}(n\geq 2)$

而当$n\geq 2$时，$b_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+c_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+b_{n-1}\right)$，

又$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$，

即$2b_n+b_{n-1}=1$.

因此$b_n=\frac{1}{2}\left(1-2b_{n-1}+b_{n-1}\right)=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geq 2)$，

故$b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(b_{n-1}-\frac{1}{3}\right)(n\geq 2)$

即数列$\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$是以$b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$为首项，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

所以$b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

又$a_n=1-2b_n=1-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

故$a_{2020}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}\right]$.

**类型四　与空间几何综合**

1.【解析】（1）从 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，

共有 $C_5^3=10$ 种取法. 其中 $X=2$ 的三角形如 $\Delta ABD$，

这类三角形共有 $C_4^3=4$ 个.

因此 $P(X=2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

（2）由题意，$X$ 的可能取值为 $\sqrt{5}$，2，$\frac{x_1}{x_2}$.

其中 $X=\sqrt{5}$ 的三角形是侧面，这类三角形共有 4 个；

其中 $X=2\sqrt{2}$ 的三角形有两个，$\Delta PAC$ 和 $\Delta PBD$.

因此 $P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{5}$，$P(X=2\sqrt{2})=\frac{1}{5}$.

所以随机变量 $X$ 的概率分布列为：

| $X$ | $\sqrt{5}$ | 2 | $\frac{x_1}{x_2}$ |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

所求数学期望

$$E(X)=\sqrt{5}\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}+2\sqrt{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4}{5}.$$

**类型五　与几何概型几何**

1.【解析】

（1）如下表：

| | 经济损失 4000 元以下 | 经济损失 4000 元以上 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 捐款超过 500 元 | 30 | 9 | 39 |
| 捐款低于 500 元 | 5 | 6 | 11 |
| 合计 | 35 | 15 | 50 |

$K^2=\frac{50\times(30\times6-9\times5)^2}{39\times11\times35\times15}\approx4.046>3.841$.

所以有$95\%$以上的把握认为捐款数额是否多于或少于 500 元和自身经济损失是否到 4000 元有关.

（2）设李师傅、张师傅到小区的时间分别为$x$，$y$，则$(x,y)$可以看成平面中的点.

试验的全部结果所构成的区域为$\Omega=\{(x,y)|7\le x\le8,7.5\le y\le8.5\}$，则$S_\Omega=1$，

事件$A$表示“李师傅比张师傅早到小区”，

所构成的区域为$A=\{(x,y)|y\ge x,7\ \le x\le8,7.5\le y\le8.5\}$，

即图中的阴影部分面积为$S_A=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ \frac{1}{2}=\frac{7}{8}$，所以$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{7}{8}$，

连续 3 天内，李师傅比张师傅早到小区的天数记为$\xi$，则$\xi\sim B(3,\frac{7}{8})$，$E(\xi)=\frac{21}{8}$.